

---

# **DKD-3**

## **Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen**

---

---

Herausgegeben von der Akkreditierungsstelle des Deutschen Kalibrierdienstes (DKD) bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB).

Copyright © 2002 by DKD

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

## **Deutscher Kalibrierdienst (DKD)**

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen zusammengeschlossen. Sie werden von der Akkreditierungsstelle des DKD bei der PTB akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten DKD-Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kalibrierungen durch DKD-Laboratorien geben dem Anwender Sicherheit für die Verlässlichkeit von Messergebnissen, erhöhen das Vertrauen der Kunden und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem nationalen und internationalen Markt und dienen als messtechnische Grundlage für die Mess- und Prüfmittelüberwachung im Rahmen von Qualitätssicherungsmaßnahmen.

Im DKD werden Kalibriermöglichkeiten für elektrische Messgrößen, für Länge, Winkel und weitere geometrische Größen, für Rauheit, Koordinaten- und Formmesstechnik, für Zeit und Frequenz, für Kraft, Drehmoment, Beschleunigung, Druck, Durchfluss, Temperatur, Feuchte, medizinische Messgrößen, akustische Messgrößen, optische Messgrößen, ionisierende Strahlung und weitere Messgrößen angeboten.

**Veröffentlichungen:** siehe Internet

## **Anschrift:**

Deutscher Kalibrierdienst bei der  
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt  
Bundesallee 100, D-38116 Braunschweig  
Postfach 33 45, D-38023 Braunschweig  
Telefon Sekretariat: (05 31) 5 92-19 01  
Fax: (05 31) 5 92-19 05  
E-Mail: [dkd@ptb.de](mailto:dkd@ptb.de)  
Internet: [www.dkd.info](http://www.dkd.info)

---

**Übersetzung der Publikation EAL-R2, Ed. 1, Apr. 97  
„Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“**

**Inhaltsverzeichnis**

	<u>Seite</u>
Nationales Vorwort	4
Zweck	4
1 Einleitung	5
2 Beschreibung und Definitionen	6
3 Ermittlung der den Eingangsschätzwerten beizuordnenden Messunsicherheit	8
4 Ermittlung der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit	11
5 Erweiterte Messunsicherheit	14
6 Angabe der Messunsicherheit in Kalibrierscheinen	15
7 Anweisung zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit	16
8 Literatur	17
Anhang A	18
Anhang B	21
Anhang C	23
Anhang D	24
Anhang E	27

---

## Nationales Vorwort

Die vorliegende Schrift ist die deutsche Fassung der 1997 erschienenen Publikation EAL-R2 „Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“, die ihrerseits auf der Grundlage des von sieben internationalen Organisationen für Normung und Messwesen veröffentlichten „Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ erarbeitet wurde. In Ergänzung zum Originaltext wurden einige erläuternde Fußnoten angefügt.

DKD-3 dient der einheitlichen Ermittlung und Angabe von Messunsicherheiten bei Kalibrierungen und trägt damit zur Äquivalenz und zur grenzüberschreitenden Anerkennung von Kalibrierscheinen bei. Gegenüber der Ausgabe 1991 wurde die Schrift jetzt vollständig neu abgefasst. Die vorliegende Ausgabe ist in vielen Einzelheiten präziser formuliert und ohne Einschränkungen anwendbar. Bei der Mehrzahl der im DKD üblichen Kalibrierungen ist jedoch nicht zu erwarten, dass sich die jetzt ermittelten Messunsicherheiten von früheren Werten wesentlich unterscheiden werden.

Die vorliegende Schrift ist für alle im DKD akkreditierten Kalibrierlaboratorien verbindlich. Sie sollte jedoch auch außerhalb des DKD breite Anwendung finden.

## Zweck

Dieses Dokument dient der Harmonisierung der Verfahren zur Ermittlung der Messunsicherheit in der European co-operation for Accreditation (EA)<sup>1</sup>. Es soll über die allgemeinen Grundsätze der EAL-R1<sup>2</sup> hinaus die spezifischen Forderungen festlegen, die an die Angabe der Messunsicherheit in den von akkreditierten Laboratorien gefertigten Kalibrierscheinen zu stellen sind, und es soll gleichzeitig die Akkreditierungsstellen bei der einheitlichen Zuweisung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit<sup>3</sup> an die von ihnen akkreditierten Kalibrierlaboratorien unterstützen. Die in diesem Dokument niedergelegten Regeln gehen auf die Empfehlungen des von sieben internationalen Organisationen für Normung und Messwesen veröffentlichten *Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* zurück, so dass die konsequente Anwendung der EAL-R2 die globale Akzeptanz europäischer Messergebnisse fördern wird.

---

### Nationale Fußnoten:

<sup>1</sup> Im Originaltext der EAL-R2 steht hier und an verschiedenen anderen Stellen EAL (European cooperation for Accreditation of Laboratories). Die EA wurde 1997 durch den Zusammenschluss der EAL und der EAC (European Accreditation of Certification) gegründet.

<sup>2</sup> Im DKD umgesetzt als DKD-5

<sup>3</sup> Auf die wörtliche Übersetzung des Ausdrucks „best measurement capability“ ist zugunsten des im DKD eingeführten Begriffs verzichtet worden. Wie im folgenden Text näher dargelegt ist, bezeichnet die „best measurement capability“ tatsächlich die kleinste Messunsicherheit, die ein akkreditiertes Kalibrierlaboratorium in Kalibrierscheinen angeben darf. Sie wird im DKD bei der Akkreditierung in der Anlage zur Akkreditierungsurkunde festgelegt.

# 1 Einleitung

**1.1** Dieses Dokument legt die Grundsätze und die Forderungen fest, auf denen eine Ermittlung der Messunsicherheit bei Kalibrierungen zu gründen ist und denen die Angabe der Messunsicherheit in Kalibrierscheinen zu genügen hat. Die Betrachtungen sind allgemein gehalten, um alle Kalibrierbereiche einzubeziehen. Falls erforderlich, kann das dargestellte Verfahren in den verschiedenen Bereichen durch detailliertere Vorgaben ergänzt werden, damit die Informationen leichter umgesetzt werden können. Bei der Entwicklung dieser ergänzenden Richtlinien sind die in diesem Dokument zusammengestellten allgemeinen Grundsätze zu befolgen, damit die Harmonisierung zwischen den verschiedenen Bereichen sichergestellt ist.

**1.2** Die in diesem Dokument dargestellte Behandlung entspricht dem *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)*, der erstmals 1993 im Auftrag vom BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP und OIML veröffentlicht wurde [1]. Während jedoch [1] so allgemein gültige Regeln für die Ermittlung und Angabe der Messunsicherheit festlegt, dass sie in allen Bereichen physikalischer Messungen befolgt werden können, zielt dieses Dokument auf die für Messungen in Kalibrierlaboratorien geeignetste Methode und beschreibt ein eindeutiges, harmonisiertes Verfahren zur Ermittlung und Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen. Es umfasst die folgenden Gebiete:

- für das Dokument wesentliche Definitionen,
- Verfahren für die Ermittlung der Messunsicherheit der Eingangsgrößen der Auswertung,
- Beziehung zwischen der Messunsicherheit der Ergebnisgröße und der Messunsicherheit der Eingangsgrößen der Auswertung,
- erweiterte Messunsicherheit der Ergebnisgröße,
- Angabe der Messunsicherheit,
- Anweisung zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit.

Ausgearbeitete Beispiele für die Anwendung des hier dargestellten Verfahrens für einige spezielle Messprobleme aus verschiedenen Bereichen werden in späteren Ergänzungen veröffentlicht werden. Die Ermittlung der Messunsicherheit wird auch in mehreren EAL-Dokumenten behandelt, die Angaben über Kalibrierverfahren enthalten; einige dieser Dokumente enthalten spezifische, ausgearbeitete Beispiele.

**1.3** In der EA wird die kleinste angebbare Messunsicherheit (auf eine spezielle Größe, die Messgröße, bezogen) als die kleinste Messunsicherheit definiert, die ein Laboratorium im Rahmen seiner Akkreditierung erreichen kann, wenn es mehr oder weniger routinemäßige Kalibrierungen durchführt von

- nahezu idealen Normalen, mit denen die Einheit der betreffenden Größe oder eines oder mehrerer ihrer Werte definiert, dargestellt, bewahrt oder reproduziert werden, oder
- nahezu idealen Messgeräten, die für die Messung der betreffenden Größe eingesetzt werden.

Die Einschätzung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit akkreditierter Kalibrierlaboratorien muss einerseits von dem in diesem Dokument dargestellten Verfahren der Auswertung ausgehen, andererseits normalerweise durch experimentelle Nachweise gestützt oder abgesichert werden. Zur Unterstützung der Akkreditierungsstellen bei der Beurteilung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit sind in Anhang A detaillierte Erläuterungen zusammengestellt.

## 2 Beschreibung und Definitionen

Anmerkung: Begriffe, die für den Haupttext von besonderer Bedeutung sind, sind kursiv gedruckt, wenn sie in diesem Dokument zum ersten Mal erscheinen. Anhang B enthält ein Glossar dieser Begriffe und Verweise auf die Dokumente, aus denen die Definitionen übernommen worden sind.

- 2.1** Die Angabe eines Messergebnisses ist nur dann vollständig, wenn sie sowohl den der Messgröße durch die Messung zugewiesenen Wert als auch die mit dieser Zuweisung verbundene Messunsicherheit enthält. In diesem Dokument werden alle Größen, deren Wert nicht genau angegeben werden kann, als *Zufallsvariable* behandelt. Hierunter fallen auch alle Einflussgrößen, die sich auf den Messwert auswirken können.
- 2.2** Die *Messunsicherheit* ist ein Parameter, der mit dem Messergebnis verbunden ist und der die Streuung der Werte charakterisiert, die der Messgröße vernünftigerweise beigeordnet werden können [2]<sup>4</sup>. Sofern keine Missverständnisse zu erwarten sind, wird „Messunsicherheit“ auch einfach „Unsicherheit“ genannt. Typische Ursachen für Unsicherheiten bei Messungen sind in der Liste in Anhang C aufgeführt.
- 2.3** *Messgrößen* sind jene speziellen Größen, deren Wert durch eine Messung bestimmt werden soll. Bei Kalibrierungen hat man es gewöhnlich mit nur einer Messgröße, auch *Ergebnisgröße*  $Y$  der Auswertung genannt, zu tun, die über die Beziehung

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (2.1)$$

mit den *Eingangsgrößen*  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) der Auswertung zusammenhängt. Die Modellfunktion  $f$  beschreibt zugleich das Messverfahren und das Verfahren der Auswertung. Sie gibt an, wie Werte der Ergebnisgröße  $Y$  aus Werten der Eingangsgrößen  $X_i$  gewonnen werden. In den meisten Fällen wird sie aus einem analytischen Ausdruck bestehen, sie kann sich aber auch aus einer Gruppe solcher Ausdrücke zusammensetzen, die Korrekturen und Korrekturfaktoren für systematische Effekte einschließen, und so zu einer komplexeren Beziehung führen, die nicht in einer einzelnen Funktion ausgedrückt werden kann. Darüber hinaus kann  $f$  auch experimentell ermittelt oder als Computeralgorithmus gegeben sein, mit dem die numerische Auswertung der Messung vorgenommen wird, oder sie kann sich als Kombination aus allen diesen Formen zusammensetzen.

<sup>4</sup> Nationale Fußnote: Die Messunsicherheit ist das quantitative Maß der Unkenntnis der Messgröße und ist von der Messabweichung zu unterscheiden.

- 2.4 Je nach der Art, wie die Werte und die ihnen beigeordnete Messunsicherheit ermittelt wurden, werden die *Eingangsgroßen*  $X_i$  in die folgenden beiden Kategorien eingeteilt:
- (a) Größen, deren Schätzwert einschließlich der ihm beizuordnenden Messunsicherheit unmittelbar in der laufenden Messung bestimmt wird. Diese Werte können z.B. aus einer einzelnen Beobachtung oder aus wiederholten Beobachtungen gewonnen sein oder aus der jeweiligen experimentellen Erfahrung stammen. Sie können die Festlegung der Korrekturen von Geräteanzeigen sowie der Korrekturen bezüglich der Einflussgrößen wie Umgebungstemperatur, Luftdruck oder Feuchtigkeit einschließen;
  - (b) Größen, deren Schätzwert einschließlich der ihm beizuordnenden Messunsicherheit nicht unmittelbar in der laufenden Messung bestimmt wird, sondern äußeren Quellen entnommen wird, wie z.B. durch kalibrierte Normale oder zertifizierte Referenzmaterialien realisierte Größen oder Referenzdaten aus Handbüchern.
- 2.5 Der Schätzwert der Messgröße  $Y$ , der mit  $y$  bezeichnete *Schätzwert der Ergebnisgröße*, wird aus Gleichung (2.1) durch Einsetzen der Schätzwerte  $x_i$  der Eingangsgroßen der Auswertung  $X_i$  gewonnen:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.2)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Eingangswerte in dem Sinne beste Schätzwerte der Eingangsgroßen sind, dass sie in bezug auf die für das Modell bedeutsamen Einflüsse und Effekte geeignet korrigiert wurden. Ist das nicht der Fall, müssen die erforderlichen Korrekturen als getrennte Eingangsgroßen in das Modell der Auswertung eingeführt werden.<sup>5</sup>

- 2.6 Für die in der Auswertung einer Messung auftretenden Zufallsvariablen wird die *Varianz* ihrer Verteilung oder die positive Quadratwurzel daraus - *Standardabweichung* genannt - als Maß für die in 2.2 beschriebene Streuung der Werte verwendet. Die dem Schätzwert  $y$  der Messgröße beizuordnende *Standardmessunsicherheit*  $u(y)$  ist die Standardabweichung der Messgröße  $Y$ . Sie wird aus den Schätzwerten  $x_i$  der Eingangsgroßen  $X_i$  und den ihnen beigeordneten Standardmessunsicherheiten  $u(x_i)$  ermittelt. Die dem Schätzwert einer Messgröße beigeordnete Standardmessunsicherheit hat dieselbe Dimension wie der Messwert. In manchen Fällen ist es sinnvoll, die *relative Standardmessunsicherheit* zu verwenden. Sie ist die einem Schätzwert beigeordnete Standardmessunsicherheit, dividiert durch den Betrag des Schätzwertes, und daher dimensionslos. Ihre Verwendung ist nicht möglich, wenn der Schätzwert gleich Null ist.

---

<sup>5</sup> Nationale Fußnote: Korrektionsgrößen sind - wie andere Eingangsgroßen auch - nie genau bekannt. Sie können bei der Unsicherheitsanalyse nur außer acht gelassen werden, wenn sie sehr genau bekannt sind, d.h. ihr Unsicherheitsbeitrag gegenüber anderen Unsicherheitsbeiträgen vernachlässigt werden kann.

### 3 Ermittlung der den Eingangsschätzwerten beizuordnenden Messunsicherheit

#### 3.1 Allgemeine Betrachtungen

- 3.1.1 Die den Schätzwerten der Eingangsgrößen beizuordnende Messunsicherheit wird nach der Ermittlungsmethode vom Typ A oder Typ B bestimmt. Die *Typ A Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit* ist die Methode, bei der die Messunsicherheit durch statistische Analyse einer Beobachtungsreihe ermittelt wird. In diesem Fall ist die Standardmessunsicherheit die empirische Standardabweichung des Mittelwertes, der durch ein Mittelungsverfahren oder eine geeignete Regressionsanalyse gewonnen wird. Die *Methode B zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit* ist die Methode, bei der die Messunsicherheit auf andere Weise als durch die statistische Analyse einer Beobachtungsreihe ermittelt wird. In diesem Fall basiert die Ermittlung auf anderen, messtechnisch fundierten Kenntnissen.

Anmerkung: In der Messtechnik treten manchmal Fälle auf - bei Kalibrierungen jedoch äußerst selten -, in denen die möglichen Werte einer Größe nur auf einer Seite eines begrenzenden Wertes liegen. Ein bekannter Fall dieser Klasse ist der sogenannte Kosinusfehler. Die Behandlung dieser Sonderfälle ist in [1] angegeben.

#### 3.2 Typ A Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit

- 3.2.1 Die Methode A zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit wird angewendet, wenn für eine der Eingangsgrößen  $X_i$  unter den gleichen Messbedingungen  $n$  unabhängige Beobachtungen vorgenommen wurden. Besitzt das Messverfahren eine ausreichende Auflösung, so weisen die gewonnenen Werte i.a. eine beobachtbare Streuung auf.
- 3.2.2 Ist die wiederholt gemessene Eingangsgröße  $X_i$  die Größe  $Q$  und wurden  $n$  statistisch unabhängige Beobachtungen ( $n > 1$ ) durchgeführt, so ist der Schätzwert  $\bar{q}$  der Größe  $Q$  der *arithmetische Mittelwert* oder *Durchschnittswert* der einzelnen, beobachteten Werte  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j \quad (3.1)$$

Die dem Schätzwert  $\bar{q}$  beizuordnende Standardmessunsicherheit ist nach einem der folgenden Verfahren zu ermitteln:

- (a) Die Varianz der den Beobachtungen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung<sup>6</sup> wird durch die *empirische Varianz*  $s^2(q)$  der Werte  $q_i$  geschätzt, die gegeben ist durch

$$s^2(q) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2 \quad (3.2)$$

<sup>6</sup> Nationale Fußnote: Genau genommen handelt es sich hier um eine Häufigkeitsverteilung.



Ihre (positive) Quadratwurzel wird *empirische Standardabweichung* der Einzelmessung genannt. Der beste Schätzwert der Varianz des arithmetischen Mittelwertes  $\bar{q}$  ergibt sich hieraus als die *empirische Varianz des Mittelwertes*. Sie ist gegeben durch

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q)}{n} \quad (3.3)$$

Ihre (positive) Quadratwurzel wird *empirische Standardabweichung des Mittelwertes* genannt. Die dem Schätzwert  $\bar{q}$  beizuordnende Standardmessunsicherheit  $u(\bar{q})$  ist die empirische Standardabweichung des Mittelwertes

$$u(\bar{q}) = s(\bar{q}) \quad (3.4)$$

Warnung: Ist die Anzahl  $n$  der wiederholten Beobachtungen klein ( $n < 10$ ), muss die Verlässlichkeit des Wertes der Standardmessunsicherheit, die nach Methode A - wie in Gleichung (3.4) ausgedrückt - berechnet wurde, in Betracht gezogen werden. Kann die Anzahl  $n$  der Beobachtungen nicht erhöht werden, müssen die anderen, im weiteren Text beschriebenen Verfahren zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit in Erwägung gezogen werden.

- (b) Ist für eine Messung nach einem wohl-definierten Messverfahren, die unter statistischer Kontrolle durchgeführt wird, eine *kombinierte* oder *zusammengefasste Ermittlung der Varianz*  $s_p^2$  der Einzelmessung verfügbar, so wird sie u.U. die Varianz der den Beobachtungen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung besser beschreiben als die im Einzelfall aus einer kleineren begrenzten Anzahl von Beobachtungen geschätzte empirische Varianz der Einzelmessung. Wird der Wert der Eingangsgröße  $Q$  in diesem Fall als arithmetisches Mittel  $\bar{q}$  der kleineren Anzahl  $n$  von statistisch unabhängig wiederholten Beobachtungen ermittelt, so kann die Varianz des Mittelwertes durch

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s_p^2}{n} \quad (3.5)$$

geschätzt werden. Die Standardmessunsicherheit, die dem Mittelwert beizuordnen ist, ist dann wiederum nach Gleichung (3.4) zu ermitteln.

### 3.3 Typ B Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit

- 3.3.1 Bei der Ermittlung der Standardmessunsicherheit nach Methode B wird die dem Schätzwert  $x_i$  der Eingangsgrößen  $X_i$  beizuordnenden Messunsicherheit nach einer Methode ermittelt, die nicht aus der statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe besteht. Die Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  wird dabei durch messtechnisch begründete Beurteilung der Variabilität<sup>7</sup> der Eingangsgröße  $X_i$  unter Berücksichtigung der verfügbaren Informationen gewonnen. Zu dieser Kategorie gehörende Werte sind:

<sup>7</sup> Nationale Fußnote: Hier ist nicht die Variabilität gemeint, die aufgrund einer unzureichenden Kontrolle einiger Messbedingungen auftreten kann. Sie ist Ursache der bei wiederholten Beobachtungen auftretenden Streuung der Werte und wird durch die Typ A Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit erfasst. Gemeint ist die auf der ungenauen Kenntnis der betreffenden Eingangsgröße zurückgehende Variabilität bei der Auswertung.

- Werte aus anderen, früher durchgeführten Messungen,
- Erfahrungen mit oder allgemeine Kenntnisse über das Verhalten und die Eigenschaften eingesetzter Materialien oder Geräte,
- Herstellerangaben,
- in Kalibrierscheinen oder anderen Bescheinigungen angegebene Werte,
- Messunsicherheiten, die Referenzwerten aus Handbüchern beigeordnet sind.

3.3.2 Eine sinnngemäße Verwendung der verfügbaren Information für die Ermittlung der Standardmessunsicherheit nach Methode B ist nur möglich, wenn ausreichende Erfahrung und allgemeine Kenntnisse vorhanden sind. Sie ist eine Fertigkeit, die in der messtechnischen Praxis erlernt wird. Eine gut fundierte Ermittlung der Standardmessunsicherheit nach Methode B wird genau so verlässlich sein wie eine Ermittlung nach Methode A, insbesondere in Situationen, in denen die Ermittlung nach Methode A nur auf einer verhältnismäßig geringen Anzahl von statistisch unabhängigen Beobachtungen beruht. Es ist zwischen den folgenden Fällen zu unterscheiden:

- Ist nur ein *Einzelwert* für die Größe  $X_i$  bekannt, z.B. ein einzelner Messwert, ein sich aus einer früheren Messung ergebender Wert, ein Referenzwert aus der Literatur oder eine Korrektur, so ist dieser Wert als Schätzwert  $x_i$  einzusetzen. Ist auch die dem Wert  $x_i$  beigeordnete Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  gegeben, ist sie zu verwenden. Anderenfalls ist die Standardmessunsicherheit aus unzweideutigen Werten der Messunsicherheit zu berechnen. Sind auch Daten dieser Art nicht verfügbar, muss ein Wert für die Standardmessunsicherheit empirisch abgeschätzt werden.
- Kann für die Größe  $X_i$  auf theoretischer oder empirischer Grundlage eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* angenommen werden, so sind der Erwartungswert und die Quadratwurzel der Varianz dieser Verteilung als Schätzwert  $x_i$  bzw. die ihm beigeordnete Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  zu verwenden.
- Können für den Wert der Größe  $X_i$  nur *Ober-* und *Untergrenzen*  $a_+$  und  $a_-$  abgeschätzt werden (z.B. Herstellerangaben über ein Messgerät, ein Bereich der Unbestimmtheit einer Temperatur, ein Rundungs- oder Abschneidefehler aufgrund einer automatischen Datenvorverarbeitung), so ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte zwischen den Grenzwerten (rechteckige Wahrscheinlichkeitsdichte) für die Unbestimmtheit der Eingangsgröße  $X_i$  anzunehmen. Dieser häufige Sonderfall des obigen Falles b) führt zu

$$x_i = \frac{1}{2}(a_+ + a_-) \quad (3.6)$$

für den Schätzwert der Eingangsgröße  $X_i$  und zu

$$u^2(x_i) = \frac{1}{12}(a_+ - a_-)^2 \quad (3.7)$$

für das Quadrat der  $X_i$  beizuordnenden Standardmessunsicherheit. Wird die Differenz zwischen den Grenzwerten mit  $2a$  bezeichnet, kann Gleichung (3.7) auch in der Form

$$u^2(x_i) = \frac{1}{3}a^2 \quad (3.8)$$

geschrieben werden. Die rechteckige Wahrscheinlichkeitsdichte ist die adäquate wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung des Kenntnisstandes, wenn außer den Grenzen der Variabilität über die Werte der Eingangsgröße  $X_i$  nichts weiter bekannt ist. Kann man aber annehmen, dass Werte der betreffenden Größe in der Nähe der Mitte des Variabilitätsbereiches wahrscheinlicher sind als Werte nahe den Grenzen, so wird eine Dreieck- oder Normalverteilung ein besseres Modell darstellen. Andererseits kann eine U-förmige Verteilung zweckmäßiger sein, wenn Werte nahe den Grenzen wahrscheinlicher als Werte in der Nähe der Mitte sind.

## 4 Ermittlung der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit

**4.1** Für unkorrelierte Eingangsgrößen ist das Quadrat der dem Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit gegeben durch

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (4.1)$$

Anmerkung: Es gibt in der Messtechnik auch Fälle, die bei Kalibrierungen selten angetroffen werden, in denen die Modellfunktion stark nichtlinear ist oder einige der Sensitivitätskoeffizienten [siehe Gleichungen (4.2) und (4.3)] verschwinden. Es müssen dann Glieder höherer Ordnung in die Gleichung (4.1) eingeführt werden. Eine Behandlung dieser Sonderfälle ist in [1] angegeben.

$u_i(y)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) ist derjenige Beitrag zur Standardmessunsicherheit, die dem Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße beizuordnen ist, der sich bei gegebenem Schätzwert  $x_i$  der Eingangsgröße  $X_i$  aus der dem Schätzwert beigeordneten Standardmessunsicherheit ergibt:

$$u_i(y) = c_i u(x_i) \quad (4.2)$$

$c_i$  ist der zu dem Eingangsschätzwert  $x_i$  gehörende *Sensitivitätskoeffizient*, das ist die partielle Ableitung der Modellfunktion  $f$  nach  $X_i$ , berechnet für die Eingangsschätzwerte  $x_i$ :

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1 \dots X_N=x_N} \quad (4.3)$$

- 4.2** Der Sensitivitätskoeffizient  $c_i$  beschreibt, in welchem Maße der Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße durch Änderungen des Schätzwertes  $x_i$  der Eingangsgröße  $X_i$  beeinflusst wird. Er kann aus der Modellfunktion  $f$  mit Hilfe von Gleichung (4.3) oder mit numerischen Methoden ermittelt werden, d.h. indem die Änderungen des Schätzwertes  $y$  für Änderungen des Schätzwertes  $x_i$  um  $+u(x_i)$  und  $-u(x_i)$  berechnet und die sich ergebende Differenz in  $y$ , dividiert durch  $2u(x_i)$ , als Wert des Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$  verwendet wird. In manchen Fällen wird man die Änderung des Schätzwertes  $y$  der Ergebnisgröße zweckmäßiger Weise experimentell bestimmen, indem man die Messung z.B. bei den beiden Werten  $x_i + u(x_i)$  und  $x_i - u(x_i)$  wiederholt und dann wie bei der numerischen Berechnung vorgeht.
- 4.3** Während  $u(x_i)$  stets positiv ist, kann der Unsicherheitsbeitrag  $u_i(y)$  nach Gleichung (4.2) je nach dem Vorzeichen des Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$  positive oder negative Werte annehmen. Im Falle korrelierter Eingangsgrößen muss das Vorzeichen von  $u_i(y)$  berücksichtigt werden; siehe Gleichung (D4) in Anhang D.
- 4.4** Ist die Modellfunktion  $f$  eine Summe oder Differenz der Eingangsgrößen  $X_i$ :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N p_i X_i \quad (4.4)$$

so ist auch der Schätzwert der Ergebnisgröße gemäß Gleichung (2.2) als entsprechende Summe oder Differenz der Schätzwerte der Eingangsgrößen

$$y = \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (4.5)$$

gegeben. Die Sensitivitätskoeffizienten sind dann gleich  $p_i$  und Gleichung (4.1) geht in

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i) \quad (4.6)$$

über.

- 4.5** Ist die Modellfunktion  $f$  ein Produkt oder Quotient der Eingangsgrößen  $X_i$ :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = c \prod_{i=1}^N X_i^{p_i} \quad (4.7)$$

so ist der Schätzwert der Ergebnisgröße wiederum ein entsprechendes Produkt oder ein Quotient der Schätzwerte der Eingangsgrößen

$$y = c \prod_{i=1}^N x_i^{p_i} \quad (4.8)$$

In diesem Fall sind die Sensitivitätskoeffizienten gleich  $p_i y / x_i$ , und Gleichung (4.1) liefert einen der Gleichung (4.6) entsprechenden Ausdruck, wenn die relativen Standardmessunsicherheiten  $w(y) = u(y) / |y|$  und  $w(x_i) = u(x_i) / |x_i|$  verwendet werden:

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 w^2(x_i) \quad (4.9)$$

- 4.6** Sind zwei Eingangsgrößen  $X_i$  und  $X_k$  zu einem gewissen Grad *korreliert*, d.h. sind sie auf die eine oder andere Weise voneinander abhängig, so muss auch ihre *Kovarianz* unter den Unsicherheitsbeiträgen berücksichtigt werden. In Anhang D ist beschrieben, wie dies zu machen ist. Inwieweit ein Effekt der Korrelationen zu berücksichtigen ist, hängt von der jeweiligen Messung, von den Kenntnissen über das Messverfahren und von der Beurteilung der wechselseitigen Abhängigkeiten der Eingangsgrößen ab. Allgemein ist zu beachten, dass die Vernachlässigung von Korrelationen zwischen den Eingangsgrößen zu einer fehlerhaften Auswertung der Standardmessunsicherheit der Messgröße führen kann.
- 4.7** Die den Schätzwerten zweier Eingangsgrößen  $X_i$  und  $X_k$  beigeordnete Kovarianz kann gleich Null gesetzt oder als vernachlässigbar angesehen werden, wenn
- die beiden Eingangsgrößen  $X_i$  und  $X_k$  voneinander unabhängig sind, z.B. weil sie in verschiedenen, voneinander unabhängigen Experimenten mehrfach, aber nicht gleichzeitig beobachtet wurden oder weil sie resultierende Größen verschiedener, unabhängig voneinander durchgeführter Ermittlungen darstellen oder wenn
  - eine der Eingangsgrößen  $X_i$  und  $X_k$  als konstant angesehen werden kann oder wenn
  - es keine Anhaltspunkte für eine Korrelation zwischen den Eingangsgrößen  $X_i$  und  $X_k$  gibt.

Manchmal können Korrelationen auch durch geeignete Wahl der Modellfunktion eliminiert werden.

- 4.8** Die Unsicherheitsanalyse einer Messung - häufig auch Messunsicherheitsbudget genannt - sollte eine Liste aller Quellen für die Unsicherheit während der Messung zusammen mit den zugehörigen Standardmessunsicherheiten und eine Angabe enthalten, wie sie ermittelt wurden. Bei mehrfach wiederholten Beobachtungen ist auch die Anzahl  $n$  der durchgeführten Beobachtungen anzugeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist es empfehlenswert, die für die Analyse wesentlichen Daten auch in tabellarischer Form zusammenzustellen. In der Tabelle sollte allen Größen ein physikalisches Formelzeichen  $X_i$  oder eine kurze Kennung zur Identifizierung beigeordnet werden. Für jede Größe sollte die Tabelle darüber hinaus wenigstens den Schätzwert  $x_i$ , die zugehörige Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$ , den Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$  und den Unsicherheitsbeitrag  $u_i(y)$  enthalten. Für die in der Tabelle eingetragenen Zahlenwerte sollte die Dimension der jeweiligen Größe angegeben werden.

- 4.9 Ein formales Beispiel für eine solche Anordnung ist in Tabelle 4.1 angegeben, die für unkorrelierte Eingangsgrößen gilt. Die dem Messergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit  $u(y)$  unten rechts in der Tabelle ist die Wurzel aus der Quadratsumme aller Unsicherheitsbeiträge in der Spalte rechts außen. Die grau hinterlegten Zellen der Tabelle verbleiben unausgefüllt.

Tabelle 4.1: Schema einer Anordnung der Größen, Schätzwerte, Standardmessunsicherheiten, Sensitivitätskoeffizienten und Unsicherheitsbeiträge, die für die Unsicherheitsanalyse verwendet werden.

Größe	Schätzwert	Standard-Messunsicherheit	Sensitivitäts-Koeffizient	Unsicherheitsbeitrag
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$
$X_1$	$x_1$	$u(x_1)$	$c_1$	$u_1(y)$
$X_2$	$x_2$	$u(x_2)$	$c_2$	$u_2(y)$
:	:	:	:	:
$X_N$	$x_N$	$u(x_N)$	$c_N$	$u_N(y)$
$Y$	$y$			$u(y)$

## 5 Erweiterte Messunsicherheit

- 5.1 In der EA ist beschlossen worden, dass von den durch EA-Mitglieder akkreditierten Kalibrierlaboratorien eine *erweiterte Messunsicherheit*  $U$  in den Kalibrierscheinen anzugeben ist, die sich aus der dem Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit  $u(y)$  durch Multiplikation mit einem *Erweiterungsfaktor*  $k$  ergibt:

$$U = ku(y) \quad (5.1)$$

In Fällen, in denen der Messgröße eine Normalverteilung (Gauß-Verteilung) zugeordnet werden kann und in denen die dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit ausreichend zuverlässig ist, ist standardmäßig der Erweiterungsfaktor  $k = 2$  zu verwenden. Die beigeordnete erweiterte Messunsicherheit entspricht einer *Überdeckungswahrscheinlichkeit* von etwa 95 %. Diese Bedingungen werden i.a. auf Kalibrierungen zutreffen.

- 5.2 Die Annahme einer Normalverteilung kann nicht in jedem Falle als gegeben angesehen werden. In den Fällen jedoch, in denen mehrere (d.h.  $N \geq 3$ ) Unsicherheitsbeiträge, die aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen unabhängiger Größen, z.B. Normal- oder Rechteckverteilungen, gewonnen wurden, vergleichbare Beiträge zu der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordnenden Standardmessunsicherheit liefern, sind die Bedingungen des zentralen Grenzwertsatzes erfüllt, so dass in sehr guter Näherung angenommen werden kann, dass für die Ergebnisgröße eine Normalverteilung vorliegt.

- 5.3** Die Zuverlässigkeit der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit kann mit Hilfe der effektiven Freiheitsgrade (siehe Anhang E) beurteilt werden. Das Kriterium der Verlässlichkeit ist i.a. voll erfüllt, wenn keiner der Unsicherheitsbeiträge nach der Typ A Ermittlungsmethode aus weniger als zehn wiederholten Beobachtungen bestimmt wurde.
- 5.4** Wenn eine der genannten Bedingungen (Normalverteilung oder ausreichende Zuverlässigkeit) nicht erfüllt ist, kann sich für den Standarderweiterungsfaktor  $k = 2$  eine erweiterte Messunsicherheit ergeben, die einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von weit weniger als 95 % entspricht. In diesen Fällen müssen andere Verfahren angewendet werden, um sicherzustellen, dass der Wert der erweiterten Messunsicherheit entsprechend etwa der gleichen Überdeckungswahrscheinlichkeit wie im Normalfall bestimmt wurde. Die Verwendung eines annähernd gleichen Wertes der Überdeckungswahrscheinlichkeit ist wesentlich, wenn Messergebnisse derselben Größe miteinander verglichen werden müssen, z.B. bei der Abschätzung der Ergebnisse eines Ringvergleichs oder bei der Einschätzung der Einhaltung einer Spezifikation.
- 5.5** Selbst wenn Normalverteilung angenommen werden kann, kann es noch passieren, dass die zu dem Ausgangsschätzwert gehörende Standardmessunsicherheit nicht ausreichend zuverlässig ist. Ist es in diesem Fall nicht möglich, die Anzahl  $n$  der wiederholten Beobachtungen zu erhöhen, noch die in dem vorliegenden Fall weniger verlässliche Typ A Ermittlungsmethode durch eine Typ B Ermittlungsmethode zu ersetzen, kann das im Anhang E angegebene Verfahren zum Einsatz kommen.
- 5.6** In den verbleibenden Fällen, d.h. in allen Fällen, in denen die Annahme einer Normalverteilung sicher nicht gerechtfertigt ist, muss man sich Informationen über die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Werte der Ergebnisgröße verschaffen, und daraus einen Wert des Erweiterungsfaktors  $k$  bestimmen, der einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % entspricht.

## 6 Angabe der Messunsicherheit in Kalibrierscheinen

- 6.1** In Kalibrierscheinen ist das vollständige Messergebnis, das aus dem Schätzwert  $y$  der Messgröße und der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit  $U$  besteht, in der Form  $y \pm U$  anzugeben. Diese Angabe ist mit einer Anmerkung zu versehen, die im allgemeinen Fall folgenden Inhalt haben sollte:

Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist das Produkt der Standardmessunsicherheit und dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$ . Sie entspricht bei einer Normalverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von etwa 95 %. Die Standardmessunsicherheit ist gemäß EAL-R2 ermittelt worden.<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup> Nationale Fußnote: Der für Kalibrierlaboratorien des DKD verbindliche Text (siehe DKD-5) lautet: Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie wurde gemäß DKD-3 ermittelt. Der Wert der Messgröße liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im zugeordneten Werteintervall.

- 6.2** In Fällen, in denen das in Anhang E angegebene Verfahren befolgt wurde, sollte die Anmerkung wie folgt lauten:

Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist das Produkt aus der Standardmessunsicherheit und dem Erweiterungsfaktor  $k = XX$ . Sie entspricht bei einer  $t$ -Verteilung mit  $\nu_{eff} = YY$  effektiven Freiheitsgraden einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %. Die Standardmessunsicherheit ist gemäß EAL-R2 ermittelt worden.<sup>9</sup>

- 6.3** Der Zahlenwert der Messunsicherheit ist mit höchstens zwei signifikanten Stellen anzugeben. Der Zahlenwert des Messergebnisses ist in der abschließenden Angabe auf die letzte gültige Ziffer im Wert der dem Messergebnis beigeordneten erweiterten Messunsicherheit zu runden. Für das Rundungsverfahren sind die üblichen Regeln für das Runden von Zahlen zu verwenden (nähere Angaben zum Runden finden sich in ISO 31-0:1992, Anhang B). Nimmt der Zahlenwert der Messunsicherheit infolge der Rundung jedoch um mehr als 5 % ab, ist der aufgerundete Wert anzugeben.

## 7 Anweisung zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit

- 7.1** Im folgenden ist eine Anweisung für die schrittweise Anwendung dieses Dokuments zur Berechnung der Messunsicherheit in der Praxis zusammengestellt (siehe die ausgearbeiteten Beispiele in getrennten Ergänzungsdokumenten):

- (a) Der Zusammenhang zwischen der Messgröße (Ergebnisgröße)  $Y$  und den Eingangsgrößen  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) der Auswertung ist entsprechend Gleichung (2.1) mathematisch zu formulieren. Im Falle eines direkten Vergleichs zweier Normale wird die Gleichung recht einfach sein, z.B.  $Y = X_1 + X_2$ .
- (b) Alle bedeutenden Korrekturen sind festzustellen und anzuwenden.
- (c) Alle Ursachen der Unsicherheit sind in einer Unsicherheitsanalyse gemäß Abschnitt 4 aufzulisten.
- (d) Die Standardmessunsicherheit  $u(\bar{q})$  für wiederholt gemessene Größen ist gemäß Unterabschnitt 3.2 zu bestimmen.
- (e) Bei Einzelwerten, z.B. bei aus anderen, früheren Messungen resultierenden Werten, bei Korrekturen oder bei Werten aus der Literatur, ist die Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  zu verwenden, sofern sie angegeben ist, oder gemäß Absatz 3.3.2 a) berechnet werden kann. Dabei ist darauf zu achten, in welcher Form die Messunsicherheit angegeben ist (Standardmessunsicherheit - erweiterte Messunsicherheit). Sind keine Werte verfügbar, aus denen die Standardmessunsicherheit ermittelt werden kann, ist ein Wert für  $u(x_i)$  auf der Grundlage der jeweiligen messtechnischen Erfahrungen zu bestimmen.

<sup>9</sup> In diesem Fall sollte die Anmerkung im DKD-Kalibrierschein lauten:

Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist das Produkt aus der Standardmessunsicherheit und dem Erweiterungsfaktor  $k = XX$ . Sie entspricht bei einer  $t$ -Verteilung mit  $\nu_{eff} = YY$  effektiven Freiheitsgraden einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %. Die Standardmessunsicherheit wurde gemäß DKD-3 ermittelt.



- (f) Für Eingangsgrößen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist oder entsprechend der vorhandenen Informationen angenommen werden kann, sind Erwartungswert  $x_i$  und Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  nach Absatz 3.3.2 b) zu berechnen. Wenn nur Ober- und Untergrenzen der Unbestimmtheit oder Variabilität der Eingangsgröße bekannt sind oder geschätzt werden können, ist die Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  gemäß Absatz 3.3.2 c) zu ermitteln.
- (g) Für jede Eingangsgröße  $X_i$  ist der Beitrag  $u_i(y)$  zur Messunsicherheit zu berechnen, die dem Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße beizuordnen ist. Er ergibt sich gemäß den Gleichungen (4.2) und (4.3) aus der dem Schätzwert  $x_i$  der Eingangsgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  durch Multiplikation mit dem Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$ . Die Quadrate der Unsicherheitsbeiträge sind gemäß Gleichung (4.1) zu summieren, um das Quadrat der Standardmessunsicherheit  $u(y)$  zu erhalten, die dem Wert der Messgröße beizuordnen ist. Ist von den Eingangsgrößen bekannt, dass sie korreliert sind, ist das in Anhang D angegebene Verfahren anzuwenden.
- (h) Die erweiterte Messunsicherheit  $U$  ist durch Multiplikation der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit  $u(y)$  mit einem gemäß Abschnitt 5 gewählten Erweiterungsfaktor  $k$  zu bestimmen.
- (i) Das Ergebnis der Messung, das den Schätzwert  $y$  der Messgröße, die beigeordnete erweiterte Messunsicherheit  $U$  und den Erweiterungsfaktor  $k$  umfasst, ist im Kalibrierschein gemäß Abschnitt 6 anzugeben.

## 8 Literatur

- [1] Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen  
(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement),  
1. Aufl. 1993, Überarbeitung und Nachdruck 1995, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).
- [2] Internationales Wörterbuch der Metrologie  
(International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology),  
2. Aufl. 1993, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).
- [3] Internationale Norm ISO 3534-1  
Statistik - Vokabular und Formelzeichen - Teil I: Wahrscheinlichkeits- und allgemeine statistische Begriffe  
(Statistics - Vocabulary and Symbols - Part I: Probability and general statistical terms),  
1. Aufl. 1993, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).

## Anhang A

### Anmerkungen zur Festlegung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit<sup>10</sup>

- A1** Die kleinste angebbare Messunsicherheit (siehe Abschnitt 1 des Haupttextes) ist einer der Parameter, die für die Festlegung des *Akkreditierungsumfangs* eines akkreditierten Kalibrierlaboratoriums verwendet werden; weitere Parameter sind die physikalische Größe, das Kalibrierverfahren oder der zu kalibrierende Gerätetyp und der Messbereich. Die kleinste angebbare Messunsicherheit wird normalerweise in der *Anlage zur Akkreditierungsurkunde* oder in anderen Unterlagen angegeben, die der *Akkreditierungsentscheidung* zugrunde liegen bzw. der *Akkreditierungsurkunde* beigelegt sind, die als Nachweis für die Akkreditierung ausgestellt wird. Gelegentlich wird sie sowohl in der Anlage zur Akkreditierungsurkunde als auch in den unterstützenden Unterlagen angegeben. Die kleinste angebbare Messunsicherheit ist eine der wesentlichen Informationen, die in den Verzeichnissen der akkreditierten Laboratorien aufgeführt sind, die regelmäßig von den Akkreditierungsstellen herausgegeben werden und von möglichen Kunden der akkreditierten Laboratorien benutzt werden, um die Eignung eines Laboratoriums für die Durchführung einer bestimmten Kalibrieraufgabe im Laboratorium oder vor Ort zu beurteilen.
- A2** Um einen Vergleich zwischen den von verschiedenen Akkreditierungsstellen akkreditierten Kalibrierlaboratorien erzielten Messunsicherheiten zu ermöglichen, müssen die Angaben über die kleinste angebbare Messunsicherheit aneinander angeglichen werden. Zur Erleichterung sind weiter unten einige Erklärungen zum Begriff "kleinste angebbare Messunsicherheit" auf der Grundlage der im Haupttext angegebenen Definition zusammengestellt.
- A3** Mit "mehr oder weniger routinemäßigen Kalibrierungen" ist gemeint, dass das Laboratorium die angegebene Messunsicherheit im Rahmen seiner *normalen* Arbeit, die es im Rahmen seiner Akkreditierung durchführt, erreichen können muss. Es gibt offensichtlich Fälle, in denen das Laboratorium aufgrund weitreichender Untersuchungen und zusätzlicher Maßnahmen mehr leisten könnte, aber diese Fälle werden nicht durch die Definition der kleinsten angebbaren Messunsicherheit abgedeckt, es sei denn, dass das Laboratorium offen das Ziel verfolgt, solche mehr wissenschaftlichen Untersuchungen durchzuführen (wodurch diese Untersuchungen dann zu "mehr oder weniger routinemäßigen" Kalibrierungen des Laboratoriums werden).
- A4** Der Ausdruck "fast ideal" in der Definition bedeutet, dass die kleinste angebbare Messunsicherheit nicht von den Merkmalen des zu kalibrierenden Geräts abhängig sein sollte. Der Begriff "fast ideal" beschreibt somit den Fall, dass keine wesentlichen Unsicherheitsbeiträge auf physikalische Effekte zurückzuführen sein sollten, die etwaigen Unvollkommenheiten des zu kalibrierenden Gerätes zugeschrieben werden müssen. Es versteht sich jedoch von selbst, dass ein "fast ideales" Gerät auch verfügbar sein muss. Wenn nachgewiesen werden kann, dass in einem bestimmten Fall selbst das "idealste" verfügbare Gerät diesem Konzept nicht entspricht, ist der aus dem Gerät resultierende Unsicherheitsbeitrag bei der Ermittlung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit mit einzubeziehen. Es ist in diesem Falle auch anzugeben, dass sie sich auf die Kalibrierung dieses speziellen Gerätetyps bezieht.

<sup>10</sup> Nationale Fußnote: s. Fußnote 3 auf Seite 4

- A5** Die Definition der kleinsten angebbaren Messunsicherheit beinhaltet, dass ein Laboratorium im Rahmen *seiner Akkreditierung* nicht berechtigt ist, eine geringere Messunsicherheit als die kleinste angebbare Messunsicherheit für seine routinemäßigen Kalibrierungen anzugeben. Das bedeutet, dass das Laboratorium eine größere Messunsicherheit angeben muss, wenn feststeht, dass der tatsächlich durchgeführte Kalibriervorgang wesentlich zur Messunsicherheit beiträgt. Typischerweise wird dabei das zu kalibrierende Gerät einen deutlichen Beitrag liefern. Offensichtlich kann die in Kalibrierscheinen *jeweils angegebene* Messunsicherheit nie kleiner als die kleinste angebbare Messunsicherheit sein. Das Laboratorium ist aufgefordert, die Grundsätze dieses Dokuments bei der Angabe der jeweiligen Messunsicherheit anzuwenden.
- A6** Es wird darauf hingewiesen, dass der Begriff der kleinsten angebbaren Messunsicherheit nur bei jenen Ergebnissen in Betracht gezogen werden muss, bei denen das Laboratorium Messergebnisse als akkreditiertes Laboratorium weitergibt. Genau genommen ist der Begriff daher ein verwaltungstechnischer Terminus und braucht die realen technischen Messmöglichkeiten des Laboratoriums nicht unbedingt widerzuspiegeln. Jedes Laboratorium kann die Akkreditierung mit einer größeren als der ihm technisch möglichen Messunsicherheit beantragen, wenn interne Gründe vorliegen<sup>11</sup>. Zu den Gründen zählen gewöhnlich die Fälle, in denen die erzielbaren Messunsicherheiten gegenüber Kunden vertraulich behandelt werden müssen, z.B. bei Forschungs- und Entwicklungsarbeiten oder wenn Dienstleistungen für besondere Kunden erbracht werden. Der Grundsatz der Akkreditierungsstelle sollte es sein, die Akkreditierung auf jeder beantragten Ebene zu gewähren, sofern das Laboratorium Kalibrierungen auf der entsprechenden Ebene durchführen kann. (Diese Überlegung bezieht sich nicht nur auf die kleinste angebbare Messunsicherheit, sondern auf alle Parameter, die den Aufgabenbereich eines Kalibrierlaboratoriums festlegen.)
- A7** Es ist Aufgabe der Akkreditierungsstelle, die kleinste angebbare Messunsicherheit zu bestätigen. Mit Ausnahme des im vorhergehenden Unterabschnitt behandelten Falles sollte die Bestimmung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit an Hand des in diesem Dokument dargelegten Verfahrens erfolgen. Sie ist in der gleichen Weise anzugeben wie die jeweilige Messunsicherheit in Kalibrierscheinen, d.h. in Form einer erweiterten Messunsicherheit, normalerweise mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$ . (Nur in den Ausnahmefällen, in denen eine Normalverteilung nicht angenommen werden kann oder die Festlegung auf einer zu begrenzten Anzahl von Daten beruht, ist die kleinste angebbare Messunsicherheit unmittelbar bezogen auf eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % anzugeben. Nähere Erläuterungen finden sich in Abschnitt 5 des Haupttextes.)
- A8** Alle Komponenten, die wesentlich zur Messunsicherheit beitragen, müssen bei der Ermittlung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit berücksichtigt werden. Für die Ermittlung der Beiträge, von denen bekannt ist, dass sie zeitlichen Änderungen unter-

---

<sup>11</sup> Nationale Fußnote: Die realen messtechnischen Möglichkeiten können unter besonderen Messbedingungen, die bei routinemäßigen Kalibrierungen aus zeitlichen oder wirtschaftlichen Gründen nicht eingehalten werden können, wesentlich besser sein. Für Kalibrierungen ist das belanglos, da sich die Akkreditierung und damit die Angabe der kleinsten angebbaren Messunsicherheit auf "mehr oder weniger routinemäßige Kalibrierungen" bezieht.

worfen sind oder sich in Abhängigkeit von einer anderen physikalischen Größe ändern, können Grenzen möglicher Änderungen festgelegt werden, von denen angenommen wird, dass sie unter normalen Arbeitsbedingungen eingehalten werden. Wenn z.B. bekannt ist, dass das verwendete Gebrauchsnormaleiner Drift unterworfen ist, muss der Beitrag, der durch die Drift zwischen aufeinanderfolgenden Kalibrierungen verursacht wird, bei der Ermittlung des vom Gebrauchsnormale herrührenden Unsicherheitsbeitrages berücksichtigt werden.

- A9** In einigen Bereichen kann die Messunsicherheit von einem zusätzlichen Parameter abhängen, wie z.B. der Frequenz der angelegten elektrischen Spannung bei der Kalibrierung von Normalwiderständen. Zusätzliche Parameter dieser Art sind zusammen mit der Messgröße und der für die zusätzlichen Parameter spezifizierten kleinsten angebbaren Messunsicherheit anzugeben. Das wird häufig so geschehen, dass die kleinste angebbare Messunsicherheit als Funktion des betreffenden Parameters angegeben wird.
- A10** Die kleinste angebbare Messunsicherheit ist normalerweise zahlenmäßig anzugeben. Sofern sie eine Funktion der Messgröße (oder eines anderen Parameters) ist, auf die sie sich bezieht, kann sie auch in analytischer Form angegeben werden. Im letzten Fall kann ein zusätzliches Diagramm den Verlauf oft noch anschaulicher machen. Es muss stets eindeutig ersichtlich sein, ob die kleinste angebbare Messunsicherheit als absoluter oder relativer Wert angegeben ist. (Gewöhnlich liefert die Angabe der zugehörigen Einheit die erforderliche Erklärung, bei Größen der Dimension 1 ist jedoch immer eine getrennte Angabe erforderlich.)
- A11** Obwohl die Festlegung nach den in diesem Dokument genannten Verfahren vorzunehmen ist, enthält der Haupttext die klare Forderung, dass die Festsetzung normalerweise durch einen experimentellen Nachweis zu stützen oder zu bestätigen ist. Diese Anforderung bedeutet, dass sich die Akkreditierungsstelle nicht allein mit einer Berechnung der Messunsicherheit begnügen sollte. Unter ihrer Aufsicht oder in ihrem Auftrag sind vielmehr Ringvergleiche durchzuführen, die die Berechnungen stützen.

---

## Anhang B

### Glossar

- B1 arithmetischer Mittelwert** ([3] Definition 2.26)  
Summe der Werte geteilt durch die Anzahl der Werte.
- B2 kleinste angebbare Messunsicherheit** (Abschnitt 1)  
kleinste Messunsicherheit, die ein Laboratorium für eine spezifische Größe unter idealen Messbedingungen im Rahmen seiner Akkreditierung erreichen kann.
- B3 Korrelation** ([3], Definition 1.13)  
Beziehung zwischen zwei oder mehreren Zufallsvariablen in einer Verteilung von zwei oder mehreren Zufallsvariablen.
- B4 Korrelationskoeffizient** ([1] Abschnitt C.3.6)  
relatives Maß der gegenseitigen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen, das gleich dem Verhältnis der Kovarianz der beiden Zufallsvariablen zum Produkt der positiven Quadratwurzeln ihrer Varianzen ist.
- B5 Kovarianz** ([1] Abschnitt C.3.4)  
Maß der gegenseitigen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen, das gleich dem Erwartungswert des Produktes der Abweichung der beiden Zufallsvariablen von ihren Erwartungswerten ist.
- B6 Erweiterungsfaktor** ([1] Definition 2.3.6)  
Zahlenfaktor, mit dem die Standardmessunsicherheit zu multiplizieren ist, um die erweiterte Messunsicherheit zu erhalten.
- B7 Überdeckungswahrscheinlichkeit** ([1] Abschnitt 2.3.5)  
ein i.a. großer Anteil der Verteilung der Werte, die auf Grund einer Messung der jeweiligen Messgröße vernünftigerweise als Ergebnis der Messung zugeschrieben werden kann.
- B8 empirische Standardabweichung** ([2] Definition 3.8)  
positive Quadratwurzel der empirischen Varianz.
- B9 empirische Varianz** ([1] Abschnitt 4.2.2)  
Größe, die das Quadrat der Streuung der Werte in einer Reihe von  $n$  Beobachtungen einer bestimmten Messgröße charakterisiert, gegeben durch Gleichung (3.2) im Text.
- B10 erweiterte Messunsicherheit** ([1] Definition 2.3.5)  
Größe, die einen Bereich um den Messwert kennzeichnet, der erwartungsgemäß einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der Messgröße durch eine Messung vernünftigerweise als Ergebnis der Messung zugeschrieben werden können.
- B11 Schätzwert einer Eingangsgröße** ([1] Abschnitt 4.1.4)  
Messwert, der einer Eingangsgröße als bester Wert zugeschrieben wird und der bei der Ermittlung des Messergebnisses benutzt wird.
- B12 Eingangsgröße** ([1] Abschnitt 4.1.2)  
Größe, von der die Messgröße abhängt und die bei der Ermittlung des Ergebnisses der Messung berücksichtigt wird.
- B13 Messgröße** ([2] Definition 2.6)  
spezielle Größe, der die Messung gilt.

- 
- B14 Schätzwert der Ergebnisgröße** ([1] Abschnitt 4.1.4)  
Messergebnis, das der Messgröße bei einer Messung zugeschrieben und das mit der Modellfunktion der Auswertung aus den Eingangsschätzwerten berechnet wird.
- B15 Ergebnisgröße** ([1] Abschnitt 4.1.4)  
Größe, die die Messgröße bei der Auswertung einer Messung darstellt.
- B16 zusammengefasster Schätzwert der Varianz** ([1] Abschnitt 4.2.4)  
empirische Varianz, die aus einer großen Reihe von Beobachtungen der gleichen Messgröße in einem wohl-definierten Messverfahren unter statistischer Kontrolle ermittelt wird.<sup>12</sup>
- B17 Wahrscheinlichkeitsverteilung** ([3] Definition 1.3)  
Funktion, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine Zufallsvariable einen bestimmten Wert oder einen Wert aus einem bestimmten Bereich annimmt.
- B18 Zufallsvariable** ([3] Definition 1.2)  
Größe, die jeden Wert aus einem gegebenen Bereich annehmen kann und zu der eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gehört.
- B19 relative Standardmessunsicherheit** ([1] Abschnitt 5.1.6)  
Standardmessunsicherheit einer Messgröße dividiert durch den Betrag des Schätzwertes der Messgröße.
- B20 Sensitivitätskoeffizient zu einem Eingangsschätzwert** ([1] Abschnitt 5.1.3)  
differentielle Änderung des Ausgangsschätzwertes bei einer differentiellen Änderung eines Eingangsschätzwertes dividiert durch die Änderung des Eingangsschätzwertes.
- B21 Standardabweichung** ([3] Definition 1.23)  
positive Quadratwurzel der Varianz einer Zufallsvariablen.
- B22 Standardmessunsicherheit** ([1] Definition 2.3.1)  
dem Schätzwert beizuschreibende, d.h. mit dem Schätzwert anzugebende Messunsicherheit, ausgedrückt als Standardabweichung.
- B23 Ermittlungsmethode A** ([1] Definition 2.3.2)  
Methode, bei der die Messunsicherheit aus der statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe gewonnen wird.
- B24 Ermittlungsmethode B** ([1] Definition 2.3.3)  
Methode, bei der die Messunsicherheit nicht aus der statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe ermittelt wird.
- B25 Messunsicherheit** ([2] Definition 3.9)  
Kennwert, der zusammen mit dem Messergebnis angegeben wird, d.h. dem Messergebnis durch die Messung beigeordnet wird, und den Bereich der Werte charakterisiert, die der Messgröße durch die Messung vernünftigerweise zugeschrieben werden können.
- B26 Varianz** ([3] Definition 1.22)  
Erwartungswert des Quadrates der Abweichung einer Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert.

---

<sup>12</sup> Nationale Fußnote: Die zur Bestimmung der Varianz herangezogenen Beobachtungen müssen eindeutig die gleiche Messgröße festlegen, die Bedingungen müssen identisch sein (Wiederholbedingungen) und die in den einzelnen Messungen ermittelte Streuung der beobachteten Werte muss allein statistischen Ursachen zuzuschreiben sein.

---

## Anhang C

### Quellen der Messunsicherheit

- C1** Die Unsicherheit eines Messergebnisses spiegelt die nicht vollständige Kenntnis über den Wert der Messgröße wider. Die vollständige Kenntnis erfordert eine unendliche Menge an Informationen. Phänomene, die zu der Unsicherheit und damit zu der Tatsache beitragen, dass das Ergebnis einer Messung nicht durch einen einzelnen Wert gekennzeichnet werden kann, werden Quellen der Unsicherheit genannt<sup>13</sup>. In der Praxis gibt es bei einer Messung viele mögliche Quellen der Unsicherheit [1], u.a. die folgenden:
- (a) die unvollständige Definition der Messgröße,
  - (b) die unvollkommene Realisierung der Definition der Messgröße,
  - (c) die nicht repräsentative Stichprobennahme, d.h. die in der Messung verwendete Probe stellt die definierte Messgröße nur mit einer gewissen Näherung dar,
  - (d) eine nicht ausreichende Kenntnis über den Einfluss der Umgebungsbedingungen oder die unvollkommenen Messungen dieser Effekte,
  - (e) die persönlichen Einflüsse bei der Ablesung von Analoggeräten,
  - (f) die endliche Auflösung oder die Ansprechschwelle von Nachweisgeräten,
  - (g) nicht exakt bekannte Werte der Normale und Referenzmaterialien,
  - (h) nicht exakt bekannte Werte von Konstanten und anderen Parametern, die aus externen Quellen entnommen und bei der Auswertung benutzt werden,
  - (i) vereinfachende Näherungen und Annahmen, die im Messprinzip oder im Messverfahren verwendet werden,
  - (j) die Streuung der Werte wiederholter Beobachtungen einer Messgröße unter offenbar gleichen Bedingungen.
- C2** Diese Quellen treten nicht immer unabhängig voneinander auf. Einige der Quellen (a) bis (i) können gemeinsam zu (j) beitragen.

---

<sup>13</sup> Nationale Fußnote: Präziser formuliert wird in einer Messung eine Größe konstruiert, deren Wert aus den Bedingungen der Messung ermittelt und der Messgröße als Ergebnis der Messung zugeordnet wird. Die Unsicherheit beschreibt, inwieweit die während der Messung gewonnenen oder in die Messung einfließenden, nicht-vollkommenen Kenntnisse die konstruierte Größe bzw. die Zuordnung ihres ermittelten Wertes an die Messgröße beeinflussen.

## Anhang D

### Korrelierte Eingangsgrößen

- D1** Wenn von zwei Eingangsgrößen  $X_i$  und  $X_k$  bekannt ist, dass sie zu einem gewissen Grade korreliert sind - d.h. wenn sie auf die eine oder andere Weise voneinander abhängig sind -, ist die mit den beiden Schätzwerten  $x_i$  und  $x_k$  verbundene *Kovarianz*

$$u(x_i, x_k) = u(x_i)u(x_k)r(x_i, x_k) \quad (i \neq k) \quad (\text{D.1})$$

als zusätzlicher Beitrag in der Messunsicherheit zu berücksichtigen. Der Grad der Korrelation wird durch den *Korrelationskoeffizienten*  $r(x_i, x_k)$  ( $i \neq k$  und  $|r| \leq 1$ ) bestimmt.

- D2** Im Falle von  $n$  Paaren unabhängig wiederholter Beobachtungen zweier Größen  $P$  und  $Q$  ist die den arithmetischen Mittelwerten  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  beizuordnende Kovarianz gegeben durch

$$s(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (p_j - \bar{p})(q_j - \bar{q}) \quad (\text{D.2})$$

Hieraus ergibt sich der Korrelationskoeffizient  $r$  durch Substitution in Gleichung (D.1).

- D3** Bei den Einflussgrößen können Korrelationen aus der jeweiligen messtechnischen Erfahrung und allgemeinen Kenntnissen über das Messverfahren begründet werden. Sofern für Korrelation zwischen den Eingangsgrößen entsprechende Kovarianzen bekannt sind oder abgeschätzt werden können, ist Gleichung (4.1) durch

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N c_i c_k u(x_i, x_k) \quad (\text{D.3})$$

wo  $c_i$  und  $c_k$  die in Gleichung (4.3) definierten Sensitivitätskoeffizienten sind, oder durch

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N u_i(y) u_k(y) r(x_i, x_k) \quad (\text{D.4})$$

zu ersetzen, wo sich die Beiträge  $u_i(y)$  zur Standardmessunsicherheit, die dem Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße beizuordnen sind, nach Gleichung (4.2) aus der Standardmessunsicherheit ergeben, die mit dem Schätzwert  $x_i$  der Eingangsgrößen angegeben werden. Es ist zu beachten, dass die zweite Summation in den Gleichungen (D.3) oder (D.4) u.U. einen negativen Wert liefern kann.

- D4** In der Praxis sind Eingangsgrößen oft korreliert, weil für die Ermittlung ihrer Werte dieselben, durch eine erhebliche Messunsicherheit gekennzeichneten, physikalischen Bezugsnormale, Messgeräte, Bezugsgrößen oder Messverfahren verwendet werden. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit an, dass die beiden Eingangsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  mit den Schätzwerten  $x_1$  und  $x_2$  von den untereinander unabhängigen Variablen  $Q_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) abhängen:



$$\begin{aligned} X_1 &= g_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_L) \\ X_2 &= g_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_L) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

wobei nicht unbedingt alle Variablen  $Q_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) in beiden Funktionen zugleich auftreten müssen. Die Schätzwerte  $x_1$  und  $x_2$  der Eingangsgrößen sind zu einem gewissen Grade korreliert, selbst wenn die Schätzwerte  $q_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) unkorreliert sind. Die den Schätzwerten  $x_1$  und  $x_2$  beigeordnete Kovarianz  $u(x_1, x_2)$  ist gegeben durch

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^L c_{1l} c_{2l} u^2(q_l) \quad (\text{D.6})$$

Hier sind  $c_{1l}$  und  $c_{2l}$  aus den Funktionen  $g_1$  und  $g_2$  analog zu Gleichung (4.3) abgeleitete Sensitivitätskoeffizienten. Da nur Glieder zu der Summe beitragen, deren Sensitivitätskoeffizienten von Null verschieden sind, ist die Kovarianz Null, wenn die Funktionen  $g_1$  und  $g_2$  keine gemeinsame Variable besitzen. Der Korrelationskoeffizient  $r(x_1, x_2)$  für die Schätzwerte  $x_1$  und  $x_2$  wird aus Gleichung (D.6) zusammen mit Gleichung (D.1) ermittelt.

- D5** Im folgenden Beispiel werden allgemein die Korrelationen zwischen den Werten bestimmt, die bei der Kalibrierung zweier Arbeitsnormale mit demselben Bezugsnormal auftreten können.

#### *Messproblem*

Die beiden Normale, die die Größen  $X_1$  und  $X_2$  darstellen, werden mit Hilfe eines Messsystems an das Bezugsnormal, das die Größe  $Q_S$  realisiert, angeschlossen. Mit dem Messsystem wird jeweils die Differenz  $z$  zwischen den realisierten Werten eines der Normale und dem Bezugsnormal mit einer Standardmessunsicherheit  $u(z)$  ermittelt. Der Wert  $q_S$  selbst ist mit der Standardmessunsicherheit  $u(q_S)$  bekannt.

#### *Mathematisches Modell*

Das Modell der Auswertung<sup>14</sup> setzt die Größen  $X_1$  und  $X_2$  der beiden Normale in Beziehung zu der Größe  $Q_S$  des Bezugsnormales und den Abweichungen  $Z_1$  und  $Z_2$

$$\begin{aligned} X_1 &= Q_S - Z_1 \\ X_2 &= Q_S - Z_2 \end{aligned} \quad (\text{D.7a})$$

Die Schätzwerte  $x_1$  und  $x_2$  sind abhängig vom Wert  $q_S$  des Bezugsnormals und den beobachteten Differenzen  $z_1$  und  $z_2$  gemäß den Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 &= q_S - z_1 \\ x_2 &= q_S - z_2 \end{aligned} \quad (\text{D.7b})$$

<sup>14</sup> Nationale Fußnote: In der deutschen Übersetzung ist abweichend vom engl. Original das Modell der Auswertung als Gleichung (D.7a) eingefügt worden, um den Unterschied zwischen den Größen und ihren Werten klarer hervorzuheben, auch wenn die Form der Größengleichung (D.7a) sich nicht wesentlich von der Gleichung der Werte (D.7b) unterscheidet.

*Standardmessunsicherheiten und Kovarianzen*

Die Schätzwerte  $z_1$ ,  $z_2$  und  $q_s$  werden als unkorreliert angenommen, weil sie in verschiedenen Messungen ermittelt wurden. Die Standardmessunsicherheiten werden aus Gleichung (4.4) berechnet, und die den Schätzwerten  $x_1$  und  $x_2$  beigeordnete Kovarianz ergibt sich aus Gleichung (D.6) unter der Annahme, dass  $u(z_1) = u(z_2) = u(z)$  ist:

$$\begin{aligned} u^2(x_1) &= u^2(q_s) + u^2(z) \\ u^2(x_2) &= u^2(q_s) + u^2(z) \\ u(x_1, x_2) &= u^2(q_s) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Der aus diesen Ergebnissen abgeleitete Korrelationskoeffizient ist

$$r(x_1, x_2) = \frac{u^2(q_s)}{u^2(q_s) + u^2(z)} \quad (\text{D.9})$$

In Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen den Standardmessunsicherheiten  $u(q_s)$  und  $u(z)$  reicht sein Wert von 0 bis +1.

- D6** Der durch Gleichung (D.5) beschriebene Fall ist einer der Fälle, in denen die direkte Berücksichtigung der Korrelation bei der Ermittlung der Standardmessunsicherheit der Messgröße durch eine geeignete Wahl der Modellfunktion vermieden werden kann. Wird nämlich eine neue Modellfunktion benutzt, die die unabhängigen Variablen  $Q_i$  direkt enthält, indem die ursprünglichen Variablen  $X_1$  und  $X_2$  in der ursprünglichen Modellfunktion  $f$  entsprechend den Transformationsgleichungen (D.5) ersetzt werden, so treten die korrelierten Variablen  $X_1$  und  $X_2$  in der neuen Modellfunktion und damit die Korrelationen zwischen ihnen nicht mehr auf.
- D7** Es gibt jedoch Fälle, in denen Korrelation zwischen zwei Eingangsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  nicht vermieden werden kann, wenn z.B. dasselbe Messgerät oder dasselbe Bezugsnormale bei der Ermittlung der Eingangsschätzwerte  $x_1$  und  $x_2$  verwendet wird, Gleichungen für die Transformation in neue unabhängige Variablen aber nicht verfügbar sind. Ist jedoch der Grad der Korrelation nicht bekannt, kann es hilfreich sein, den maximalen Einfluss, den diese Korrelation haben kann, durch eine obere Grenze der der Messgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit abzuschätzen. Sie hat - wenn weitere Korrelationen nicht berücksichtigt werden müssen - die Form

$$u^2(y) \leq \left( |u_1(y)| + |u_2(y)| \right)^2 + u_r^2(y) \quad (\text{D.10})$$

wobei  $u_r(y)$  der Beitrag zur Standardmessunsicherheit aller verbleibenden Eingangsgrößen ist, die als unkorreliert zu den beiden Eingangsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  angenommen werden.<sup>15</sup>

<sup>15</sup> Nationale Fußnote: Gleichung (D.10) kann relativ einfach auf Fälle ausgedehnt werden, die eine oder mehrere Gruppen mit zwei oder mehr korrelierten Eingangsgrößen behandeln. In diesem Fall ist für jede Gruppe korrelierter Größen das Quadrat einer entsprechenden Summe für den ungünstigsten Fall in Gleichung (D.10) einzuführen.

## Anhang E

### Aus effektiven Freiheitsgraden abgeleitete Erweiterungsfaktoren

- E1** Die Festlegung eines Erweiterungsfaktors  $k$ , der einer bestimmten Überdeckungswahrscheinlichkeit entspricht, erfordert, dass die Verlässlichkeit der Standardmessunsicherheit  $u(y)$ , die dem Schätzwert  $y$  der Ergebnisgröße beigeordnet ist, in Betracht gezogen wird. Das bedeutet, dass berücksichtigt wird, wie gut die mit dem Messergebnis verbundene Standardabweichung durch  $u(y)$  geschätzt wird. Bei der Schätzung der Standardabweichung einer Normalverteilung sind die Freiheitsgrade des Schätzwertes, die vom Umfang der jeweiligen Stichprobe abhängen, ein Maß für die Verlässlichkeit. Ein geeignetes Maß für die Verlässlichkeit der einem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit bildet in analoger Weise der zugehörige effektive Freiheitsgrad  $\nu_{\text{eff}}$ . Sofern die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie erfüllt sind, ist der zum Messergebnis gehörende effektive Freiheitsgrad in guter Näherung durch eine Kombination der effektiven Freiheitsgrade der verschiedenen Unsicherheitsbeiträge  $u_i(y)$  gegeben.
- E2** Liegen die Bedingungen für die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes vor, so umfasst das Verfahren zur Berechnung eines Erweiterungsfaktors  $k$  die folgenden drei Schritte:
- (a) Ermittlung der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit nach dem in Abschnitt 7 angegebenen Verfahren der schrittweisen Bestimmung.
  - (b) Abschätzung der effektiven Freiheitsgrade  $\nu_{\text{eff}}$ , die zu der Standardmessunsicherheit  $u(y)$  gehören mit Hilfe der Welch-Satterthwaite-Formel

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Hierin sind  $u_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) die in Gleichung (4.2) definierten Beiträge zur Standardmessunsicherheit, denen das Messergebnis  $y$  beigeordnet ist und die sich aus den Messunsicherheiten ergeben, die den als statistisch unabhängig vorausgesetzten Schätzwerten  $x_i$  der Eingangsgrößen beigeordnet sind, und  $\nu_i$  die effektiven Freiheitsgrade der Unsicherheitsbeiträge  $u_i(y)$ .

Für einen Wert der Standardmessunsicherheit  $u_i(\bar{q})$ , der nach der Ermittlungsmethode A gemäß Unterabschnitt 3.1 bestimmt wurde, ist der Freiheitsgrad durch  $\nu_i = n - 1$  gegeben. Die Festlegung der Freiheitsgrade, die zu einem nach der Ermittlungsmethode B bestimmten Wert der Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  gehört, erfordert demgegenüber in jedem Einzelfall eine genauere Überlegung. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es allgemein üblich ist, Abschätzungen des Unbestimmtheits- oder Variabilitätsbereiches so durchzuführen, dass Unterschätzungen vermieden werden. Werden z.B. Unter- und Obergrenzen  $a_-$  und  $a_+$  festgelegt, so werden sie gewöhnlich so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die

betreffende Größe außerhalb dieser Grenzen liegt, sehr klein ist. Unter dieser Annahme können die Freiheitsgrade der nach der Ermittlungsmethode B bestimmten Standardmessunsicherheit  $u(x_i)$  mit  $\nu_i \rightarrow \infty$  angenommen werden.

- (c) Bestimmung des Erweiterungsfaktors  $k$  aus der Tabelle, die in diesem Anhang als Tabelle E.1 enthalten ist. Diese Tabelle fußt auf einer  $t$ -Verteilung, die für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95,45 % ermittelt wurde. Ist  $\nu_{eff}$  keine ganze Zahl, was gewöhnlich der Fall ist, so ist  $\nu_{eff}$  auf die nächst niedrigere ganze Zahl abzurunden.

Tabelle E.1: Erweiterungsfaktoren  $k$  für verschiedene effektive Freiheitsgrade  $\nu_{eff}$

$\nu_{eff}$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	$\infty$
$k$	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00

---

**DKD-3-E1**      **Angabe der Messunsicherheit  
bei Kalibrierungen**  
Ergänzung 1 - Beispiele

---

Herausgegeben von der Akkreditierungsstelle des Deutschen Kalibrierdienstes (DKD) bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB).

Copyright © 2002 by DKD

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

## **Deutscher Kalibrierdienst (DKD)**

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen zusammengeschlossen. Sie werden von der Akkreditierungsstelle des DKD bei der PTB akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten DKD-Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kalibrierungen durch DKD-Laboratorien geben dem Anwender Sicherheit für die Verlässlichkeit von Messergebnissen, erhöhen das Vertrauen der Kunden und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem nationalen und internationalen Markt und dienen als messtechnische Grundlage für die Mess- und Prüfmittelüberwachung im Rahmen von Qualitätssicherungsmaßnahmen.

Im DKD werden Kalibriermöglichkeiten für elektrische Messgrößen, für Länge, Winkel und weitere geometrische Größen, für Rauheit, Koordinaten- und Formmesstechnik, für Zeit und Frequenz, für Kraft, Drehmoment, Beschleunigung, Druck, Durchfluss, Temperatur, Feuchte, medizinische Messgrößen, akustische Messgrößen, optische Messgrößen, ionisierende Strahlung und weitere Messgrößen angeboten.

**Veröffentlichungen:** siehe Internet

### **Anschrift:**

Deutscher Kalibrierdienst bei der  
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt  
Bundesallee 100, D-38116 Braunschweig  
Postfach 33 45, D-38023 Braunschweig  
Telefon Sekretariat: (05 31) 5 92-19 01  
Fax: (05 31) 5 92-19 05  
E-Mail: [dkd@ptb.de](mailto:dkd@ptb.de)  
Internet: [www.dkd.info](http://www.dkd.info)

---

**Übersetzung des Abschnittes Supplement 1, Examples der Publikation EA-4/02,  
„Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“, Dez. 1999**

**Inhaltsverzeichnis**

	<u>Seite</u>
S1 Einleitung	4
S2 Kalibrierung eines Gewichtsstückes mit dem Nennwert 10 kg	5
S3 Kalibrierung eines 10 k $\Omega$ Normalwiderstandes	7
S4 Kalibrierung eines Endmaßes der Nennlänge 50 mm	10
S5 Kalibrierung eines Typ-N-Thermopaars bei 1000 °C	15
S6 Kalibrierung eines Leistungsmesskopfes bei der Frequenz von 18 GHz	20
S7 Kalibrierung eines schaltbaren koaxialen Dämpfungsgliedes für einen Dämpfungsschritt von 30 dB	24

**Nationales Vorwort**

Die Schrift DKD-3-E-1 ergänzt die Schrift DKD-3, Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen. DKD-3-E1 ist die deutsche Übersetzung des im Dezember 1999 erschienenen Supplement 1 der Publikation EA-4/02, Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration. Sie basiert auf der ersten Fassung von DKD-3-E1 und Supplement 1 von EA-4/02 (damals EAL-R2), die im Oktober 1998 bzw. im April 1997 erschienen ist.

Die vorliegende geänderte Neuauflage enthält ein aktualisiertes Impressum, aktualisierte Bezüge und redaktionelle Änderungen.

Die Beispielsammlung soll die Umsetzung der in DKD-3 dargestellten Methode zur Ermittlung der Messunsicherheit erleichtern.

Zusätzliche Beispiele aus den Kalibrierlaboratorien und den Fachausschüssen des DKD sind weiterhin willkommen.

geänderte Neuauflage: 09/2002

## **S1 Einleitung**

- S1.1** Die folgenden Beispiele verdeutlichen die mathematischen Verfahren, die bei der Bestimmung der Messunsicherheit eingesetzt werden. Stärker an der Praxis orientierte Beispiele müssen in Zukunft auf der Grundlage entsprechender Modelle von speziellen Arbeitsgruppen in den verschiedenen Fachdisziplinen entwickelt werden. Die hier zusammengestellten Beispiele liefern dennoch einen allgemeinen Überblick darüber, wie bei einer Bestimmung der Messunsicherheit vorzugehen ist.
- S1.2** Die Beispiele wurden aus Entwürfen entwickelt, die von einzelnen EA-Fachausschüssen bereitgestellt worden sind. Diese Entwürfe sind vereinfacht und aufeinander abgestimmt worden, damit sie von den Fachkräften in allen Kalibrierlaboratorien nachvollzogen werden können. Die Vereinfachungen und Abstimmungen wurden mit dem Ziel unternommen, dass die Gruppe der Beispiele insgesamt zu einem besseren Verständnis der für die Entwicklung eines Modells der Auswertung erforderlichen Konzepte beiträgt und die Vereinheitlichung der Bestimmung der Messunsicherheit unabhängig von dem jeweiligen Fachgebiet fördert.
- S1.3** Die in den Beispielen angegebenen Unsicherheitsbeiträge und Messwerte stellen keine verbindlichen oder typischen Anforderungen dar. Die einzelnen Laboratorien sind vielmehr aufgefordert, die Unsicherheitsanteile auf der Grundlage der Modellfunktion zu bestimmen, die sie für die Auswertung der von ihnen durchgeführten Kalibrierung verwenden, und die so ermittelte Messunsicherheit auf den von ihnen ausgestellten Kalibrierscheinen anzugeben. In allen Beispielen sind die in Abschnitt 5 angegebenen Bedingungen erfüllt, so dass der Standarderweiterungsfaktors  $k = 2$  verwendet ist.
- S1.4** Entsprechend dem in Abschnitt 7 des Dokuments EA-4/02 angegebenen Verfahren zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit folgt die Darstellung der Beispiele dem folgenden Schema:
- ein kurzer beschreibender Titel
  - eine allgemeine Beschreibung des Messvorgangs
  - das Modell der Auswertung mit einer Liste der verwendeten Zeichen und Symbole
  - eine ausführliche Liste der Eingangsdaten mit einer kurzen Beschreibung, wie sie gewonnen worden sind
  - die Liste der Beobachtungen und die Berechnung der statistischen Parameter
  - ein Messunsicherheitsbudget in Tabellenform
  - die erweiterte Messunsicherheit
  - das im Kalibrierschein anzugebende vollständige Messergebnis.
- S1.5** Dieser ersten Ergänzung von EA-4/02 werden weitere Ergänzungen mit neuen ausgearbeiteten Beispielen folgen, die unter anderem auch die Bestimmung der Messunsicherheit bei der Kalibrierung von Geräten behandeln werden. Beispiele hierzu finden sich auch in den EA Leitfäden zur Kalibrierung spezieller Messgerätetypen.



## **S2 Kalibrierung eines Gewichtsstückes mit dem Nennwert 10 kg**

**S2.1** Die Kalibrierung eines Gewichtsstückes mit einem Nennwert von 10 kg der OIML-Klasse M1 wird durch Vergleich mit einem Referenznormal (OIML-Klasse F2) mit dem gleichen Nennwert unter Verwendung einer Wägeeinrichtung durchgeführt, deren messtechnische Charakteristika zuvor ermittelt worden sind.

**S2.2** Der konventionelle Wägewert  $m_x$  ergibt sich aus:

$$m_x = m_s + \delta m_D + \delta m + \delta m_C + \delta B \quad (\text{S2.1})$$

mit:

- $m_s$  - konventioneller Wägewert des Referenznormal
- $\delta m_D$  - Drift des konventionellen Wägewertes des Referenznormal seit seiner letzten Kalibrierung
- $\delta m$  - beobachtete Wägedifferenz zwischen dem zu kalibrierenden Gewichtsstück und dem Referenznormal
- $\delta m_C$  - Korrektur bezüglich exzentrischer Belastung und magnetischer Effekte
- $\delta B$  - Korrektur bezüglich des Luftauftriebes

**S2.3 Referenznormal ( $m_s$ ):** Der Kalibrierschein gibt für das Referenznormal einen Wägewert von 10 000,005 g mit einer beigeordneten erweiterten Messunsicherheit von 45 mg (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) an.

**S2.4 Drift des Wertes des Referenznormal ( $\delta m_D$ ):** Die Drift des Wägewertes des Referenznormal wird aus früheren Kalibrierungen auf Null mit einer maximalen Abweichung von  $\pm 15$  mg geschätzt.

**S2.5 Wägeeinrichtung ( $\delta m, \delta m_C$ ):** Aus einer früheren Ermittlung der Wiederholbarkeit der Differenz der konventionellen Wägewerte zweier Gewichtsstücke des gleichen Nennwertes mit der benutzten Wägeeinrichtung ergibt sich ein zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung von 25 mg. Eine Korrektur bezüglich der Kalibrierung der Wägeeinrichtung wird nicht vorgenommen; Abweichungen bezüglich einer exzentrischen Belastung und magnetischer Effekte wird durch eine Rechteckverteilung mit den Grenzen von  $\pm 10$  mg abgeschätzt.

**S2.6 Luftauftrieb ( $\delta B$ ):** Für den Luftauftrieb wird keine Korrektur angebracht; die Grenzen der hieraus resultierenden Abweichungen werden auf  $\pm 1 \cdot 10^{-6}$  des Nennwertes geschätzt.

**S2.7 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S2.8 Beobachtungen ( $\delta m$ ):** Die Wägedifferenz zwischen dem zu kalibrierenden Gewichtsstück und dem Referenznormal wird nach der Substitutionsmethode mit dem Wägezyklus ABBA bestimmt. Es wurden drei Beobachtungen durchgeführt:

Nr.	Konventioneller Wägewert	Anzeige	Beobachtete Differenz
1	Referenznormal	+0,010 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,020 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,025 g	
	Referenznormal	+0,015 g	+0,01 g
2	Referenznormal	+0,025 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,050 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,055 g	
	Referenznormal	+0,020 g	+0,03 g
3	Referenznormal	+0,025 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,045 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,040 g	
	Referenznormal	+0,020 g	+0,02 g

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{\delta m} = 0,020 \text{ g}$$

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung:

$$s_p(\delta m) = 25 \text{ mg}$$

(aus früheren Ermittlungen)

Standardmessunsicherheit:

$$u(\delta m) = s(\overline{\delta m}) = \frac{25 \text{ mg}}{\sqrt{3}} = 14,4 \text{ mg}$$

## S2.9 Messunsicherheitsbudget ( $m_X$ ):

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$m_S$	10 000,005 g	22,5 mg	Normal	1,0	22,5 mg
$\delta m_D$	0,000 g	8,66 mg <sup>1</sup>	Rechteck	1,0	8,665 mg <sup>1</sup>
$\delta m$	0,020 g	14,4 mg	Normal	1,0	14,4 mg
$\delta m_C$	0,000 g	5,77 mg	Rechteck	1,0	5,77 mg
$\delta B$	0,000 g	5,77 mg	Rechteck	1,0	5,77 mg
$m_X$	10 000,025 g				29,3 mg

## S2.10 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(m_X) = 2 \cdot 29,3 \text{ mg} \cong 59 \text{ mg}$$

<sup>1</sup> Im Originaltext von EA-4/02 steht hier ein falscher Wert.

## S2.11 Vollständiges Messergebnis

Der ermittelte konventionelle Wägewert des Gewichtsstücks mit dem Nennwert 10 kg beträgt 10,000 025 kg  $\pm$  59 mg.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

## S3 Kalibrierung eines 10 k $\Omega$ Normalwiderstandes

**S3.1** Der Widerstand eines Vierpol-Normalwiderstandes wird nach der Substitutionsmethode durch Vergleich mit einem als Referenznormal wirkenden, kalibrierten Vierpol-Normalwiderstand desselben Nennwertes unter Zuhilfenahme eines 7½-stelligen Digitalmultimeters im Widerstandsmessbereich bestimmt. Die Widerstände befinden sich in einem gut gerührten Ölbad, dessen Temperatur von 23 °C mit einem zentrisch angeordneten Quecksilberthermometer registriert wird. Vor der Messung wird den Widerständen ausreichend Zeit gelassen, sich thermisch zu stabilisieren. Die Vierpolanschlüsse der einzelnen Widerstände werden nacheinander mit den Klemmen des DMM verbunden. Es ist überprüft worden, dass bei dem Messstrom von 100  $\mu$ A im 10 k $\Omega$ -Messbereich des DMM nennenswerte Effekte durch Eigenerwärmung der Widerstände nicht auftreten. Das Messverfahren stellt auch sicher, dass sich äußere Leckwiderstände nur unwesentlich auf das Messergebnis auswirken.

**S3.2** Der Widerstandswert  $R_X$  des zu kalibrierenden Widerstandes ergibt sich aus der Beziehung:

$$R_X = (R_S + \delta R_D + \delta R_{TS}) r_C r - \delta R_{TX} \quad (\text{S3.1})$$

mit:

$R_S$	-	Wert des Referenzwiderstandes
$\delta R_D$	-	Drift des Wertes des Referenzwiderstandes seit seiner letzten Kalibrierung
$\delta R_{TS}$	-	temperaturabhängige Widerstandsänderung des Referenzwiderstandes
$r = R_{iX} / R_{iS}$	-	Verhältnis der angezeigten Werte (der Index i bedeutet "angezeigt") des zu kalibrierenden Widerstandes und des Referenzwiderstandes
$r_C$	-	Korrektionsfaktor für Störspannungen und das Auflösungsvermögen des Digitalmultimeters
$\delta R_{TX}$	-	temperaturabhängige Widerstandsänderung des zu kalibrierenden Widerstandes

- S3.3 Referenznormal ( $R_S$ ):** Der Kalibrierschein des Referenznormals gibt einen Widerstandswert von  $10\,000,053\,\Omega \pm 5\,\text{m}\Omega$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) bei der Bezugstemperatur von  $23\,^\circ\text{C}$  an.
- S3.4 Drift des Widerstandswertes des Referenznormals ( $\delta R_D$ ):** Die Drift des Widerstandswertes des Referenzwiderstandes seit seiner letzten Kalibrierung wird aus seiner Kalibriergeschichte auf  $+20\,\text{m}\Omega$  mit Abweichungen innerhalb von  $\pm 10\,\text{m}\Omega$  geschätzt.
- S3.5 Temperaturkorrekturen ( $\delta R_{TX}, \delta R_{TS}$ ):** Die Temperatur des Ölbad es wird mit einem kalibrierten Thermometer zu  $23,00\,^\circ\text{C}$  registriert. Unter Berücksichtigung der messtechnischen Charakteristika des verwendeten Thermometers und der Temperaturgradienten im Ölbad wird geschätzt, dass die Temperatur der Widerstände innerhalb von  $\pm 0,055\,\text{K}$  mit der registrierten Temperatur übereinstimmt. Damit ergibt der bekannte Wert  $5 \cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$  des Temperaturkoeffizienten (TK) des Referenzwiderstandes die Grenzen von  $\pm 2,75\,\text{m}\Omega$  für Abweichungen vom kalibrierten Widerstandswert, die auf mögliche Abweichungen von der gemessenen Badtemperatur zurückzuführen sind. Aufgrund der Herstellerangaben wird geschätzt, dass der TK des unbekannten Widerstandes nicht größer als  $10 \cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$  ist, so dass Widerstandsabweichungen des zu kalibrierenden Widerstandes aufgrund möglicher Temperaturabweichungen auf maximal  $\pm 5,5\,\text{m}\Omega$  geschätzt werden.
- S3.6 Widerstandsmessungen ( $r, r_C$ ):** Da für die Beobachtung von  $R_{IX}$  und  $R_{IS}$  dasselbe DMM verwendet wird, sind die Unsicherheitsbeiträge korreliert. Dieser Effekt führt, da das Verhältnis der Widerstände auftritt zu einer Verringerung des Unsicherheitsbeitrages, indem nur die relative Differenz zwischen den Widerstandsanzeigen, die ihre Ursache in systematischen Effekten wie Störspannungen und Geräteauflösung haben, berücksichtigt werden müssen (siehe mathematische Anmerkung in Abschnitt S3.12). Die Abweichungen für diese Effekte werden für die einzelnen Anzeigen mit  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}$  abgeschätzt. Für das Verhältnis  $r_C$  ergibt sich eine Dreieckverteilung mit dem Erwartungswert von  $1,000\,000\,0$  und Grenzen von  $\pm 1,0 \cdot 10^{-6}$ .
- S3.7 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.
- S3.8 Beobachtungen ( $r$ ):** Das Verhältnis  $r$  ist fünfmal beobachtet worden:

Nr.	Beobachtetes Verhältnis
1	1,000 010 4
2	1,000 010 7
3	1,000 010 6
4	1,000 010 3
5	1,000 010 5

Arithmetischer Mittelwert:	$\bar{r} = 1,000\,010\,5$
Empirische Standardabweichung:	$s(r) = 0,158 \cdot 10^{-6}$
Standardmessunsicherheit:	$u(r) = s(\bar{r}) = \frac{0,158 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} = 0,0707 \cdot 10^{-6}$

### S3.9 Messunsicherheitsbudget ( $R_X$ ):

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$R_S$	10 000,053 $\Omega$	2,5 m $\Omega$	Normal	1,0	2,5 m $\Omega$
$\delta R_D$	0,020 $\Omega$	5,8 m $\Omega$	Rechteck	1,0	5,8 m $\Omega$
$\delta R_{TS}$	0,000 $\Omega$	1,6 m $\Omega$	Rechteck	1,0	1,6 m $\Omega$
$\delta R_{TX}$	0,000 $\Omega$	3,2 m $\Omega$	Rechteck	1,0	3,2 m $\Omega$
$r_C$	1,000 000 0	$0,41 \times 10^{-6}$	Dreieck	10 000 $\Omega$	4,1 m $\Omega$
$r$	1,000 010 5	$0,07 \times 10^{-6}$	Normal	10 000 $\Omega$	0,7 m $\Omega$
$R_X$	10 000,178 $\Omega$				8,33 m $\Omega$

### S3.10 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(R_X) = 2 \cdot 8,33 \text{ m}\Omega \cong 17 \text{ m}\Omega$$

### S3.11 Vollständiges Messergebnis:

Der gemessene Wert des 10 k $\Omega$  Widerstandes bei einer Messtemperatur von 23,00 °C und einem Messstrom von 100  $\mu$ A beträgt (10 000,178  $\pm$  0,017)  $\Omega$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

### S3.12 Mathematische Anmerkung zur Standardmessunsicherheit des Verhältnisses der angezeigten Widerstandswerte:

Der zu kalibrierende Widerstand und der Referenzwiderstand besitzen nahezu den gleichen Widerstandswert. Innerhalb der üblichen, in den Abweichungen linearen Näherung ergeben sich die Werte, die die DMM-Anzeigen  $R_{iX}$  und  $R_{iS}$  hervorrufen durch

$$\begin{aligned} R_X' &= R_{iX} \left(1 + \frac{\delta R_X'}{R}\right) \\ R_S' &= R_{iS} \left(1 + \frac{\delta R_S'}{R}\right) \end{aligned} \quad (\text{S3.2})$$

wobei  $R$  der Nennwert der Widerstände und  $\delta R_X'$  und  $\delta R_S'$  die unbekannten Abweichungen sind. Das aus diesen Ausdrücken abgeleitete Widerstandsverhältnis ist

$$\frac{R_X'}{R_S'} = r r_C \quad (\text{S3.3})$$

Hier tritt das Verhältnis der angezeigten Werte des zu kalibrierenden Widerstandes und des Referenzwiderstandes

$$r = \frac{R_X}{R_S} \quad (\text{S3.4})$$

so wie der Korrektionsfaktor (lineare Näherung in den Abweichungen)

$$r_C = 1 + \frac{\delta R_X' - \delta R_S'}{R} \quad (\text{S3.5})$$

auf. Da in Gl. (S3.5) die Differenz der Abweichungen vorkommt, haben korrelierte Beiträge der systematischen Effekte, die sich aus der Kalibrierung des DMM ergeben, keinen Einfluss auf das Ergebnis. Die Standardmessunsicherheit des Korrektionsfaktors wird allein durch die unkorrelierten Abweichungen bestimmt, die sich aus den Störeffekten und der Auflösung des DMM ergeben. Unter der Annahme, dass  $u(\delta R_X') \equiv u(\delta R_S') \equiv u(\delta R')$ , ergibt sich die Standardmessunsicherheit durch folgenden Ausdruck :

$$u^2(r_C) = 2 \frac{u^2(\delta R')}{R^2} \quad (\text{S3.6})$$

## **S4 Kalibrierung eines Endmaßes der Nennlänge 50 mm**

**S4.1** Die Kalibrierung eines Endmaßes der Toleranzklasse 0 (ISO 3650) mit einer Nennlänge von 50 mm erfolgt durch Vergleich mit Hilfe eines Längenkomparators und eines kalibrierten Endmaßes derselben Nennlänge, das aus demselben Material wie das zu kalibrierende Endmaß gefertigt ist, als Referenznormal. Die Mittenmaßdifferenz wird in vertikaler Positionierung der beiden Endmaße mit zwei hochauflösenden Tastern bestimmt, die jeweils die obere und die untere Messfläche berühren. Die tatsächliche Länge  $l_X'$  des zu kalibrierenden Endmaßes ergibt sich aus der tatsächlichen Länge  $l_S'$  des Referenznormales entsprechend der Gleichung:

$$l_X' = l_S' + \delta l \quad (\text{S4.1})$$

wobei  $\delta l$  die ermittelte Längendifferenz ist.  $l_X'$  und  $l_S'$  sind die Längen der Endmaße unter den Messbedingungen, insbesondere bei einer Temperatur, die aufgrund der Unsicherheit der Messung der Labortemperatur i. Allg. nicht mit der Bezugstemperatur für Längenmessungen übereinstimmt.

**S4.2** Die Länge  $l_X$  des zu kalibrierenden Endmaßes bei der Bezugstemperatur ergibt sich aus der Beziehung:

$$l_x = l_s + \delta l_D + \delta l + \delta l_C - L(\bar{\alpha} \cdot \delta t + \delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}) - \delta l_V \quad (\text{S4.2})$$

mit:

$l_s$	- Länge des Referenzendmaßes bei der Bezugstemperatur $t_0 = 20\text{ °C}$ gemäß seinem Kalibrierschein
$\delta l_D$	- Längenänderung des Referenzendmaßes seit seiner letzten Kalibrierung infolge von Drift
$\delta l$	- beobachtete Längendifferenz zwischen dem unbekannten Endmaß und dem Referenzendmaß
$\delta l_C$	- Korrektur hinsichtlich einer Nichtlinearität und eines Offset des Längenkomparators
$L$	- nominelle Länge der Endmaße
$\bar{\alpha} = (\alpha_x + \alpha_s) / 2$	- Mittelwert der thermischen Ausdehnungskoeffizienten des zu kalibrierenden und des Referenzendmaßes
$\delta t = (t_x - t_s)$	- Temperaturdifferenz zwischen dem zu kalibrierenden und dem Referenzendmaß
$\delta \alpha = (\alpha_x - \alpha_s)$	- Differenz der thermischen Ausdehnungskoeffizienten zwischen dem zu kalibrierenden und dem Referenzendmaß
$\Delta \bar{t} = (t_x + t_s) / 2 - t_0$	- Abweichung der mittleren Temperatur des zu kalibrierenden Endmaßes und des Referenzendmaßes von der Bezugstemperatur
$\delta l_V$	- Korrektur hinsichtlich nicht-zentrischer Antastung der Messflächen des zu kalibrierenden Endmaßes

**S4.3 Referenznormal ( $l_s$ ):** Im Kalibrierschein wird die Länge des Referenzendmaßes zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit für einen Endmaßsatz mit 50,000 02 mm  $\pm 30$  nm (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) angegeben.

**S4.4 Drift des Referenznormales ( $\delta l_D$ ):** Die zeitliche Drift der Länge des Referenzendmaßes wird aus früheren Kalibrierungen auf Null mit maximalen Abweichungen von  $\pm 30$  nm abgeschätzt. Die allgemeine Erfahrung mit Endmaßen dieses Typs weist darauf hin, dass eine Nulldrift höchst wahrscheinlich ist und dass eine Dreieckverteilung für etwaige Abweichungen angenommen werden kann.

**S4.5 Längenkomparator ( $\delta l_C$ ):** Vor der Kalibrierung wurde überprüft, dass der Längenkomparator den geforderten Spezifikationen des Leitfadens für die Kalibrierung von Endmaßen EA-10/02<sup>2</sup> entspricht. Daher kann sichergestellt werden, dass für Längendifferenzen  $D$  bis zu  $\pm 10\text{ }\mu\text{m}$  die Korrekturen der angegebenen Längendifferenz innerhalb der Grenzen  $\pm(30\text{ nm} + 0,02 \cdot |D|)$  liegen. Aus den Toleranzen des zu kalibrierenden Endmaßes der Toleranzklasse 0 und des Referenzendmaßes der Toleranzklasse K ergibt sich die maximale Längendifferenz zu  $\pm 1\text{ }\mu\text{m}$ , d.h. die Grenzen für Nichtlinearitäts- und Offsetkorrekturen des Längenkomparators betragen  $\pm 32\text{ nm}$ .

<sup>2</sup> frühere Bezeichnung: EAL-G21

**S4.6 Temperaturkorrekturen ( $\bar{\alpha}, \delta t, \delta \alpha, \Delta \bar{t}$ ):** Es wurde dafür Sorge getragen, dass die Endmaße vor der Kalibrierung die Temperatur des Messraumes annehmen. Eine verbleibende Temperaturdifferenz zwischen dem Referenznormal und dem zu kalibrierenden Endmaß wird auf maximal  $\pm 0,05$  K geschätzt. Aus den Angaben im Kalibrierschein des Referenzendmaßes und der Herstellerangaben für das zu kalibrierende Endmaß ist ersichtlich, dass der thermische Längenausdehnungskoeffizient der Stahleindmaße innerhalb von  $(11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  liegt. Für die Differenz der Längenausdehnungskoeffizienten ergibt sich aus der Kombination der beiden Rechteckverteilungen eine Dreiecksverteilung in den Grenzen  $\pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Die Abweichung der mittleren Temperatur im Messraum von der Bezugstemperatur  $t_0 = 20 \text{ °C}$  wird auf maximal  $\pm 0,5$  K geschätzt. Da der Schätzwert für die Differenz der Längenausdehnungskoeffizienten und die Abweichungen der mittleren Temperatur von der Bezugstemperatur Null sind, müssen bei der Ermittlung des entsprechenden Unsicherheitsbeitrags Terme zweiter Ordnung berücksichtigt werden. Dadurch ergibt sich die dem Produktterm  $\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}$  in Gl. (S4.2) beizuordnende Standardmessunsicherheit als Produkt der Standardmessunsicherheiten, die seinen Faktoren beizuordnen ist (siehe mathematische Anmerkung in Abschnitt S4.13, Gl. (S4.5)). So ergibt sich schließlich  $u(\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}) = 0,236 \cdot 10^{-6}$ .

**S4.7 Nicht-zentrische Antastung ( $\delta l_v$ ):** Bei Endmaßen der Toleranzklasse 0 muss die aus Messungen in der Mitte und an den vier Ecken ermittelte Längendifferenz innerhalb von  $\pm 0,12 \text{ µm}$  liegen (ISO 3650). Unter der Annahme, dass diese Änderung an den Messflächen entlang der 9 mm langen kurzen Kante auftritt und dass das Mittenmaß in einem Kreis mit dem Radius 0,5 mm angetastet wird, wird eine Korrektur aufgrund einer nicht-zentrischen Antastung auf maximal  $\pm 6,7 \text{ nm}$  geschätzt.

**S4.8 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S4.9 Beobachtungen ( $\delta l$ ):** Zur Bestimmung der Differenz zwischen dem unbekannten Endmaß und dem Referenzendmaß wurden fünf Beobachtungen durchgeführt, wobei der Längenkomparator mit Hilfe des Referenznormales vor jeder Ablesung bezüglich eines Offsets korrigiert wurde:

Nr.	Beobachteter Wert
1	−100 nm
2	−90 nm
3	−80 nm
4	−90 nm
5	−100 nm



Arithmetischer Mittelwert:  $\overline{\delta l} = -94 \text{ nm}$

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung  
(aus früheren Ermittlungen):  $s_p(\delta l) = 12 \text{ nm}$

Standardmessunsicherheit  $u(\delta l) = s(\overline{\delta l}) = \frac{12 \text{ nm}}{\sqrt{5}} = 5,37 \text{ nm}$

Der zusammengefasste Schätzwert der Standardabweichung stammt aus Prüfungen, mit denen nachgewiesen wurde, dass der verwendete Längenkomparator den Anforderungen des Leitfadens für die Kalibrierung von Endmaßen EA-10/02<sup>2</sup> entspricht.

#### S4.10 Messunsicherheitsbudget ( $l_x$ ):

Größe	Schätzwert	Standard- messunsicherheit	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient	Unsicherheits- beitrag
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$		$c_i$	$u_i(y)$
$l_s$	50,000 020 mm	15 nm	Normal	1,0	15,0 nm
$\delta l_b$	0 mm	12,2 nm <sup>3</sup>	Dreieck <sup>3</sup>	1,0	12,2 nm <sup>3</sup>
$\delta l$	-0,000 094 mm	5,37 nm	Normal	1,0	5,37 nm
$\delta l_c$	0 mm	18,5 nm	Rechteck	1,0	18,5 nm
$\delta t$	0 °C	0,0289 °C	Rechteck	-575 nm °C <sup>-1</sup>	-16,6 nm
$\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}$	0	0,236 x 10 <sup>-6</sup>	-	50 mm	-11,8 nm
$\delta l_v$	0 mm	3,87 nm	Rechteck	-1,0	-3,87 nm
$l_x$	49,999 926 mm				34,3 nm <sup>3</sup>

#### S4.11 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(l_x) = 2 \cdot 34,3 \text{ nm} \cong 69 \text{ nm}^3$$

**S4.12 Vollständiges Messergebnis:** Die gemessene Länge des Endmaßes der Nennlänge 50 mm beträgt 49,999 926 mm ± 69 nm.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

<sup>3</sup> Im Originaltext von EA-4/02 wurde für den Unsicherheitsanteil der Drift hier abweichend von der Angabe in S.4.4 eine Rechteckverteilung angesetzt.

#### **S4.13 Mathematische Anmerkung zur Standardmessunsicherheit des Produktes zweier Größen mit einem Erwartungswert von Null:**

Tritt ein Produkt aus zwei Größen auf, muss von der üblichen Methode zur Bestimmung der Unsicherheitsbeiträge, die auf der Linearisierung der Modellfunktion beruht, abgewichen werden, wenn einer oder beide Erwartungswerte der Faktoren gleich Null sind. Sind die Faktoren in dem Produkt statistisch voneinander unabhängig und sind ihre Erwartungswerte von Null verschieden, kann das Quadrat der dem Produkt beizuordnenden relativen Standardmessunsicherheit (relative Varianz) ohne Linearisierung durch die Quadrate der den Faktoren beizuordnenden relativen Standardmessunsicherheiten ausgedrückt werden:

$$w^2(x_1 \cdot x_2) = w^2(x_1) + w^2(x_2) + w^2(x_1) \cdot w^2(x_2) \quad (\text{S4.3})^4$$

Unter Benutzung der Definition der relativen Standardmessunsicherheit, kann dieser Ausdruck leicht in die folgende allgemeine Beziehung umgewandelt werden:

$$u^2(x_1 \cdot x_2) = x_2^2 u^2(x_1) + x_1^2 u^2(x_2) + u^2(x_1) \cdot u^2(x_2) \quad (\text{S4.4})^4$$

Wenn die den Erwartungswerten  $x_1$  und  $x_2$  beizuordnenden Standardmessunsicherheiten  $u(x_1)$  und  $u(x_2)$  wesentlich kleiner sind als die Beträge der jeweiligen Erwartungswerte, kann der dritte Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Die resultierende Gleichung stellt den Fall dar, der mit der üblichen Methode aufgrund der Linearisierung der Modellfunktion behandelt wird.

Wenn jedoch einer der Beträge der Erwartungswerte, z.B.  $|x_2|$ , wesentlich kleiner als die diesem Erwartungswert beizuordnende Standardmessunsicherheit oder sogar gleich Null ist, kann zwar der diesen Erwartungswert enthaltende Produktterm, nicht jedoch der dritte Term auf der rechten Seite von Gl. (S4.4)<sup>4</sup> vernachlässigt werden. Die sich ergebende Gleichung lautet dann:

$$u^2(x_1 \cdot x_2) \cong x_1^2 u^2(x_2) + u^2(x_1) \cdot u^2(x_2) \quad (\text{S4.5})^4$$

Sind beide Beträge der Erwartungswerte wesentlich kleiner als ihre zugehörigen Standardunsicherheiten oder sogar gleich Null, bleibt nur der dritte Term in Gl. (S4.4)<sup>4</sup> als wesentlicher Beitrag bestehen:

$$u^2(x_1 \cdot x_2) \cong u^2(x_1) \cdot u^2(x_2) \quad (\text{S4.6})^4$$

<sup>4</sup> Gegenüber dem Originaltext von EA-4/02 ist hier die Nummerierung der Formeln geändert.

## S5 Kalibrierung eines Typ-N-Thermopaars bei 1000 °C

**S5.1** Ein Typ-N-Thermopaar wird durch Vergleich mit zwei Typ R Referenzthermopaaren in einem horizontalen Ofen bei einer Temperatur von 1000 °C kalibriert. Die von den Thermopaaren erzeugte EMK wird mit einem Digitalvoltmeter über einen Wahl-/Umschalter gemessen. Alle Thermopaare haben ihre Vergleichsstellen bei 0 °C. Das zu kalibrierende Thermopaar ist über Ausgleichsleitungen mit dem Vergleichspunkt verbunden.

**S5.2** Die Temperatur  $t_X$  der Messstelle (heiße Lötstelle) des zu kalibrierenden Thermopaars ist:

$$t_X = t_S(V_{IS} + \delta V_{IS1} + \delta V_{IS2} + \delta V_R - \frac{\delta t_{0S}}{C_{S0}}) + \delta t_S + \delta t_D + \delta t_F$$

$$\cong t_S(V_{IS}) + C_S \cdot \delta V_{IS1} + C_S \cdot \delta V_{IS2} + C_S \cdot \delta V_R - \frac{C_S}{C_{S0}} \delta t_{0S} + \delta t_S + \delta t_D + \delta t_F \quad (S5.1)$$

**S5.3** Die Spannung  $V_X$  an den Anschlüssen der Ausgleichsleitung des zu kalibrierenden Thermopaars beträgt, wenn die Vergleichsstelle bei 0 °C liegt:

$$V_X(t) \cong V_X(t_X) + \frac{\Delta t}{C_X} - \frac{\delta t_{0X}}{C_{X0}}$$

$$= V_{IX} + \delta V_{IX1} + \delta V_{IX2} + \delta V_R + \delta V_{LX} + \frac{\Delta t}{C_X} - \frac{\delta t_{0X}}{C_{X0}} \quad (S5.2)$$

mit:

$t_S(V)$	- Temperatur des Referenzthermometers in Abhängigkeit von der Spannung, wenn die Vergleichsstelle bei 0 °C liegt. Die Funktion ist im Kalibrierschein angegeben.
$V_{IS}, V_{IX}$	- angezeigte Spannungswerte
$\delta V_{IS1}, \delta V_{IX1}$	- Spannungskorrekturen aufgrund der Kalibrierung des Voltmeters
$\delta V_{IS2}, \delta V_{IX2}$	- Spannungskorrekturen aufgrund der begrenzten Auflösung des Voltmeters
$\delta V_R$	- Spannungskorrektur aufgrund von Kontakteffekten des Umschalters
$\delta t_{0S}, \delta t_{0X}$	- Temperaturkorrekturen aufgrund der Abweichung der Vergleichstemperaturen von 0 °C
$C_S, C_X$	- Spannungsempfindlichkeiten der Thermopaare bei der Messtemperatur von 1000 °C
$C_{S0}, C_{X0}$	- Spannungsempfindlichkeiten der Thermopaare bei der Vergleichstemperatur von 0 °C
$\delta t_D$	- Änderung der Werte der Referenzthermometer seit ihrer letzten Kalibrierung aufgrund von Driften

$\delta t_F$	- Temperaturkorrektur aufgrund von Inhomogenitäten der Ofentemperatur
$t$	- Temperatur, bei der das Thermopaar zu kalibrieren ist (Kalibrierpunkt)
$\Delta t = t - t_X$	- Abweichung der Temperatur des Kalibrierpunktes von der Temperatur des Ofens
$\delta V_{LX}$	- Spannungskorrektur aufgrund der Ausgleichsleitungen

**S5.4** Die Messgröße ist die Ausgangs-EMK des zu kalibrierenden Thermopaars bei der Temperatur seiner Messstelle (heiße Lötstelle). Der Messprozess besteht aus zwei Schritten - Bestimmung der Ofentemperatur und Bestimmung der EMK des zu kalibrierenden Thermopaars -, die Bestimmung des Messwertes und der beizuordnenden Messunsicherheit aus zwei Teilen.

**S5.5 Referenznormale ( $t_S(V)$ ):** Die Referenzthermopaare werden mit Kalibrierscheinen geliefert, in denen die Temperatur an der Messstelle bei einer Temperatur der Vergleichsstelle von 0 °C in Abhängigkeit von der Spannung an ihren Zuleitungen gegeben ist. Die zugeordnete erweiterte Messunsicherheit bei 1000 °C beträgt  $U = 0,3$  K (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ).

**S5.6 Kalibrierung des Voltmeters ( $\delta V_{IS1}$ ,  $\delta V_{IX1}$ ):** Das Voltmeter ist kalibriert. Alle abgelesenen Spannungen sind entsprechend korrigiert. Der Kalibrierschein gibt für Spannungen kleiner als 50 mV eine konstante erweiterte Messunsicherheit von  $U = 2,0$  µV an (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ).

**S5.7 Auflösung des Voltmeters ( $\delta V_{IS2}$ ,  $\delta V_{IX2}$ ):** Ein 4½-stelliger Mikrospannungsmesser ist in seinem 10 mV-Bereich benutzt worden, d.h. die Auflösungsgrenzen der Anzeige betragen  $\pm 0,5$  µV.

**S5.8 Störspannungen ( $\delta V_R$ ):** Restoffsetspannungen, die auf Kontaktspannungen des Umschalters zurückzuführen sind, liegen innerhalb  $\pm 2$  µV.

**S5.9 Vergleichstemperaturen ( $\delta t_{0S}$ ,  $\delta t_{0X}$ ):** Die Temperatur der Vergleichspunkte der einzelnen Thermopaare betragen 0 °C mit maximalen Abweichungen von  $\pm 0,1$  K.

**S5.10 Spannungsempfindlichkeiten ( $C_S$ ,  $C_X$ ,  $C_{S0}$ ,  $C_{X0}$ ):** Die Spannungsempfindlichkeiten der Thermopaare sind Referenztabellen entnommen:

	1000 °C	0 °C
Referenzthermopaar	$C_S = 0,077$ K/µV	$C_{S0} = 0,189$ K/µV
zu kalibrierendes Thermopaar	$C_X = 0,026$ K/µV	$C_{X0} = 0,039$ K/µV

**S5.11 Drift der Referenznormale ( $\delta t_D$ ):** Aus früheren Kalibrierungen werden die Driften der Referenznormale auf Null mit den Grenzen von  $\pm 0,3$  K abgeschätzt.

**S5.12 Temperaturinhomogenitäten ( $\delta t_F$ ):** Die Temperaturgradienten im Ofen sind gemessen worden. Bei  $1000$  °C liegen die Abweichungen aufgrund der Inhomogenitäten der Temperatur im Messbereich in den Grenzen von  $\pm 1$  K.

**S5.13 Ausgleichsleitungen ( $\delta V_{LX}$ ):** Die Ausgleichsleitungen sind in dem Bereich  $0$  °C bis  $40$  °C untersucht worden. Aus diesen Messungen werden die Spannungsdifferenzen zwischen den Leitungen und dem Thermopaar auf innerhalb von  $\pm 5$   $\mu$ V geschätzt.

**S5.14 Beobachtungen ( $V_{is}, t_S(V_{is}), V_{ix}$ ):** Die vom Voltmeter angezeigten Spannungen werden nach folgendem Messzyklus aufgezeichnet, bei dem vier Anzeigen pro Thermopaar erfolgen und die Effekte der Temperaturdrift in der Wärmequelle und der Thermospannungen im Messkreis vermindert werden:

1. Zyklus:

1. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 2. Referenznormal,  
2. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 1. Referenznormal.  
Polumkehr.

2. Zyklus:

1. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 2. Referenznormal,  
2. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 1. Referenznormal.

**S5.15** Dieses Verfahren ist nur anwendbar, wenn die beobachtete Temperaturdifferenz zwischen den beiden Referenznormalen  $\pm 0,3$  °C nicht überschreitet. Liegt die Differenz nicht in diesen Grenzen, müssen die Beobachtungen wiederholt werden und/oder die Gründe für die große Differenz müssen untersucht werden.

Thermopaar	1. Referenz	Unbekannt	2. Referenz
angezeigte Spannung, korrigiert	+10500 $\mu$ V	+36245 $\mu$ V	+10503 $\mu$ V
	+10503 $\mu$ V	+36248 $\mu$ V	+10503 $\mu$ V
	-10503 $\mu$ V	-36248 $\mu$ V	-10505 $\mu$ V
	-10504 $\mu$ V	-36251 $\mu$ V	-10505 $\mu$ V
Mittlere Spannung	10502,5 $\mu$ V	36248 $\mu$ V	10504 $\mu$ V
Temperatur der Messstelle	1000,4 °C		1000,6 °C
Temperatur des Ofens		1000,5 °C	

**S5.16** Aus den vier Anzeigen der einzelnen Thermopaare in der obenstehenden Tabelle wird der Mittelwert der Spannungen der einzelnen Thermopaare bestimmt. Die Spannungswerte der Referenzthermopaare werden mit Hilfe der in ihren Kalibrierscheinen

angegebenen Temperatur/Spannungs-Beziehungen in Temperaturwerte umgerechnet. Die beobachteten Temperaturwerte sind stark korreliert (Korrelationsfaktor nahezu eins). Durch Verwendung des arithmetischen Mittelwertes werden sie zu nur einer Beobachtung zusammengefasst, die die Temperatur des Ofens am Ort des zu kalibrierenden Thermopaars angibt. In analoger Weise wird eine Beobachtung der Spannung des zu kalibrierenden Thermopaars ermittelt. Zur Ermittlung der diesen Beobachtungen beizuordnenden Standardmessunsicherheit wurde in einer früheren Messung eine aus zehn Beobachtungen bestehende Messreihe bei der gleichen Betriebstemperatur gewonnen. Sie ergab einen zusammengefassten Schätzwert der Standardabweichung für die Temperatur des Ofens und die Spannung des zu kalibrierenden Thermopaars.

Die Standardmessunsicherheiten, die den beobachteten Größen beizuordnen sind, sind:

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung:  $s_p(t_S) = 0,10 \text{ K}$

Standardmessunsicherheit:  $u(t_S) = \frac{s_p(t_S)}{\sqrt{1}} = 0,10 \text{ K}$

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung:  $s_p(V_{IX}) = 1,6 \mu\text{V}$

Standardmessunsicherheit:  $u(V_{IX}) = \frac{s_p(V_{IX})}{\sqrt{1}} = 1,6 \mu\text{V}$

### S5.17 Messunsicherheitsbudget (Temperatur $t_X$ des Ofens)

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$t_S$	1000,5 °C	0,10 K	Normal	1,0	0,10 K
$\delta V_{IS1}$	0 $\mu\text{V}$	1,00 $\mu\text{V}$	Normal	0,077 K / $\mu\text{V}$	0,077 K
$\delta V_{IS2}$	0 $\mu\text{V}$	0,29 $\mu\text{V}$	Rechteck	0,077 K / $\mu\text{V}$	0,022 K
$\delta V_R$	0 $\mu\text{V}$	1,15 $\mu\text{V}$	Rechteck	0,077 K / $\mu\text{V}$	0,089 K
$\delta t_{0S}$	0 K	0,058 K	Rechteck	-0,407	-0,024 K
$\delta t_S$	0 K	0,15 K	Normal	1,0	0,15 K
$\delta t_D$	0 K	0,173 K	Rechteck	1,0	0,173 K
$\delta t_F$	0 K	0,577 K	Rechteck	1,0	0,577 K
$t_X$	1000,5 °C				0,641 K

### S5.18 Messunsicherheitsbudget (EMK $V_X$ des zu kalibrierenden Thermopaars)

Die der Abweichung der Ofentemperatur vom eingestellten (angestrebten) Kalibrierpunkt beizuordnende Standardmessunsicherheit ist die der Temperatur des Ofens beigeordnete Standardmessunsicherheit, da der Kalibrierpunkt ein definierter (genau bekannter) Wert ist.

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$V_{iX}$	36 248 $\mu\text{V}$	1,60 $\mu\text{V}$	Normal	1,0	1,60 $\mu\text{V}$
$\delta V_{iX1}$	0 $\mu\text{V}$	1,00 $\mu\text{V}$	Normal	1,0	1,00 $\mu\text{V}$
$\delta V_{iX2}$	0 $\mu\text{V}$	0,29 $\mu\text{V}$	Rechteck	1,0	0,29 $\mu\text{V}$
$\delta V_R$	0 $\mu\text{V}$	1,15 $\mu\text{V}$	Rechteck	1,0	1,15 $\mu\text{V}$
$\delta V_{LX}$	0 $\mu\text{V}$	2,9 $\mu\text{V}$	Rechteck	1,0	2,9 $\mu\text{V}$
$\Delta t$	0,5 K	0,641 K	Normal	38,5 $\mu\text{V}/\text{K}$	24,5 $\mu\text{V}$
$\delta t_{0X}$	0 K	0,058 K	Rechteck	-25,6 $\mu\text{V}/\text{K}$	-1,48 $\mu\text{V}$
$V_X$	36 229 $\mu\text{V}$				25,0 $\mu\text{V}$

### S5.19 Erweiterte Messunsicherheiten

Die der Messung der Ofentemperatur beizuordnende erweiterte Messunsicherheit beträgt:

$$U = k \cdot u(t_X) = 2 \cdot 0,641 \text{ K} \cong 1,3 \text{ K}$$

Die mit dem Wert der EMK des zu kalibrierenden Thermopaars beizuordnende erweiterte Messunsicherheit beträgt:

$$U = k \cdot u(V_X) = 2 \cdot 25,0 \mu\text{V} \cong 50 \mu\text{V}$$

### S5.20 Vollständiges Messergebnis

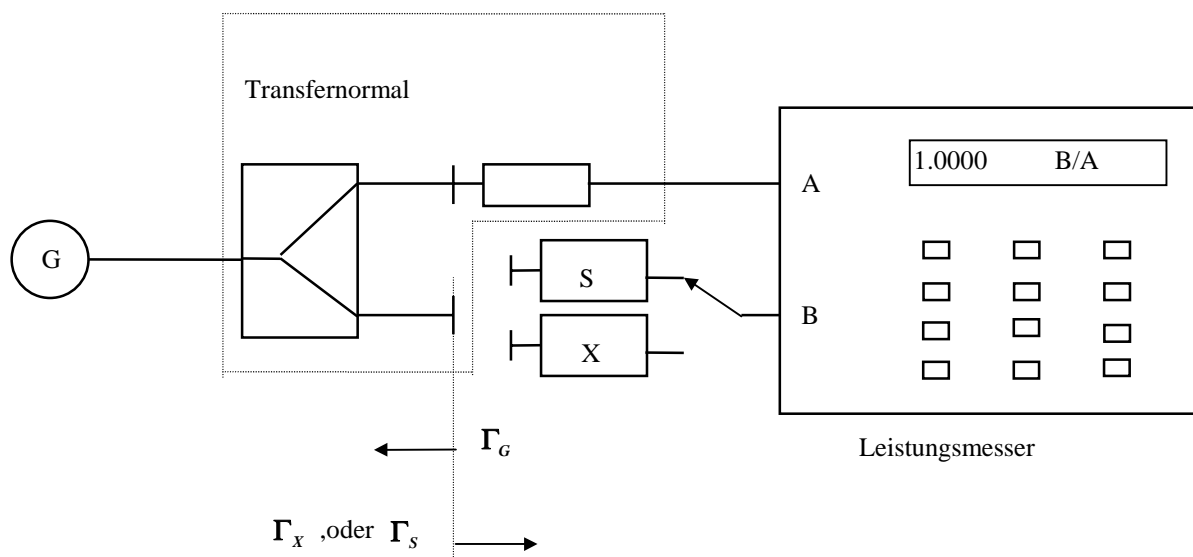
Das Typ-N-Thermopaar liefert bei der Temperatur von 1000,0 °C eine EMK von 36 230  $\mu\text{V} \pm 50 \mu\text{V}$ , wenn sich seine Vergleichsstelle (kalte Lötstelle) auf einer Temperatur von 0 °C befindet.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

## S6 Kalibrierung eines Leistungsmesskopfes bei der Frequenz von 18 GHz

**S6.1** Zur Kalibrierung wird ein HF-Leistungsmesskopf mit einem als Referenznormal dienenden kalibrierten Leistungsmesskopf nach der Substitutionsmethode unter Benutzung eines stabilen Transfernormales mit bekanntem, kleinen Reflexionsfaktor verglichen. Gemessen wird der Kalibrierungsfaktor, der als das Verhältnis der einfallenden Leistung (incident power) bei der Bezugsfrequenz von 50 MHz zur einfallenden Leistung bei der Kalibrierfrequenz definiert ist, unter der Bedingung, dass beide Eingangsleistungen zum gleichen Ausgangssignal des Leistungsmesskopfes führen. Bei der Kalibrier- und der Bezugsfrequenz wird für den zu kalibrierenden Leistungsmesskopf resp. den Referenzmesskopf das Leistungsverhältnis bezüglich des im Transfernormales integrierten Messkopfes mit einem zweikanaligen Leistungsmesser bestimmt, der das Leistungsverhältnis direkt anzeigt.

### S6.2 Schematische Darstellung des Messsystems



**S6.3** Die Größe  $K$ , die von verschiedenen Herstellern als "Kalibrierungsfaktor" bezeichnet wird, ist definiert für die Bedingung gleicher Anzeige am Leistungsmesser als:

$$K = \frac{P_{lr}}{P_{lc}} = \frac{(1 + |\Gamma_r|^2) P_{Ar}}{(1 + |\Gamma_c|^2) P_{Ac}} \quad (\text{S6.1})$$



mit:

$P_{lr}$	-	einfallende Leistung bei der Bezugsfrequenz (50 MHz)
$P_{lc}$	-	einfallende Leistung bei der Kalibrierfrequenz
$\Gamma_r$	-	Reflexionsfaktor des Messkopfes bei der Bezugsfrequenz
$\Gamma_c$	-	Reflexionsfaktor des Messkopfes bei der Kalibrierfrequenz
$P_{Ar}$	-	vom Messkopf bei der Bezugsfrequenz aufgenommene Leistung
$P_{Ac}$	-	vom Messkopf bei der Kalibrierfrequenz aufgenommene Leistung

**S6.4** Der Kalibrierungsfaktor des zu kalibrierenden Messkopfes ergibt sich aus der Beziehung:

$$K_X = (K_S + \delta K_D) \frac{M_{Sr} M_{Xc}}{M_{Sc} M_{Xr}} p_{Cr} p_{Cc} p \quad (\text{S6.2})$$

mit:

$K_S$	-	Kalibrierungsfaktor des Referenzleistungsmesskopfes
$\delta K_D$	-	Änderung des Kalibrierungsfaktors des Referenzleistungsmessers seit seiner letzten Kalibrierung aufgrund einer Drift
$M_{Sr}$	-	Fehlanpassungsfaktor des Referenzmesskopfes bei der Bezugsfrequenz
$M_{Sc}$	-	Fehlanpassungsfaktor des Referenzmesskopfes bei der Kalibrierfrequenz
$M_{Xr}$	-	Fehlanpassungsfaktor des zu kalibrierenden Messkopfes bei der Bezugsfrequenz
$M_{Xc}$	-	Fehlanpassungsfaktor des zu kalibrierenden Messkopfes bei der Kalibrierfrequenz
$p_{Cr}$	-	Korrektur des beobachteten Verhältnisses aufgrund der Nichtlinearität und der begrenzten Auflösung des Leistungsmessers beim Leistungsverhältnis der Bezugsfrequenz
$p_{Cc}$	-	Korrektur des beobachteten Verhältnisses aufgrund der Nichtlinearität und der begrenzten Auflösung des Leistungsmessers beim Leistungsverhältnis der Kalibrierfrequenz
$p = \frac{p_{Sr} p_{Xc}}{p_{Sc} p_{Xr}}$	-	beobachtetes Verhältnis der Leistungsverhältnisse, das sich ergibt aus dem:
$p_{Sr}$	-	angezeigten Leistungsverhältnis für den Bezugsmesskopf bei der Bezugsfrequenz
$p_{Sc}$	-	angezeigten Leistungsverhältnis für den Bezugsmesskopf bei der Kalibrierfrequenz
$p_{Xr}$	-	angezeigten Leistungsverhältnis für den zu kalibrierenden Messkopf bei der Bezugsfrequenz
$p_{Xc}$	-	angezeigten Leistungsverhältnis für den zu kalibrierenden Messkopf bei der Kalibrierfrequenz

- S6.5 Bezugsmesskopf ( $K_S$ ):** Der Bezugsmesskopf ist sechs Monate zuvor kalibriert worden. Der im Kalibrierschein angegebene Wert des Kalibrierungsfaktors beträgt  $(95,7 \pm 1,1) \%$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ); dieser Wert wird als  $0,957 \pm 0,011$  benutzt.
- S6.6 Drift des Normals ( $\delta K_D$ ):** Die Drift des Kalibrierungsfaktors des Bezugsnormals wird aus jährlichen Kalibrierungen auf  $-0,002$  pro Jahr mit Abweichungen von  $\pm 0,004$  abgeschätzt. Aus diesen Werten ergibt sich die Drift des Bezugsmesskopfes, der ein halbes Jahr vorher kalibriert wurde, zu  $-0,001$  mit maximalen Abweichungen von  $\pm 0,002$ .
- S6.7 Linearität und Auflösung des Leistungsmessers ( $p_{Cr}, p_{Cc}$ ):** Die erweiterte Messunsicherheit von  $0,002$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) bzw.  $0,0002$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) wird den Leistungsmessanzeigen auf dem Leistungsverhältnisniveau der Bezugsfrequenz bzw. auf dem Leistungsverhältnisniveau der Kalibrierfrequenz aufgrund von Nichtlinearitäten des verwendeten Leistungsmessers beigeordnet. Diese Werte sind in früheren Messungen gewonnen worden. Da derselbe Leistungsmesser für die Beobachtung von  $p_S$  und  $p_X$  verwendet wird, sind die Unsicherheitsbeiträge bei der Bezugs- und der Kalibrierfrequenz korreliert. Die Leistungsverhältnisse werden bei beiden Frequenzen bestimmt, so dass der Effekt der Korrelation zu einer Verringerung der Messunsicherheit führt. Daher muss nur die auf systematische Effekte zurückzuführende relative Differenz zwischen den Anzeigen berücksichtigt werden (siehe mathematische Anmerkung in Abschnitt S3.12). Das führt dazu, dass dem Korrektionsfaktor  $p_{Cr}$  eine Standardmessunsicherheit von  $0,00142$  und dem Korrektionsfaktor  $p_{Cc}$  eine Standardmessunsicherheit von  $0,000142$  beigeordnet wird.
- Die für die Anzeigen des Leistungsmessers angegebene erweiterte Messunsicherheit enthält Effekte aufgrund der Nichtlinearitäten und der Auflösung. Die Linearitätseffekte sind korreliert, während die Auflösungseffekte unkorreliert sind. Wie in S3.12 dargestellt, hebt die Bildung des Leistungsverhältnisses den Einfluss von Korrelationen auf und ergibt eine reduzierte Standardmessunsicherheit, die dem jeweiligen Leistungsverhältnis beizuordnen ist. In den obigen Berechnungen sind die getrennten korrelierten und unkorrelierten Anteile jedoch nicht bekannt, und die angegebenen Werte sind Obergrenzen für die zu den Leistungsverhältnissen gehörende Standardmessunsicherheit. Das Messunsicherheitsbudget zeigt schließlich, dass die aus den Leistungsverhältnissen stammenden Unsicherheitsbeiträge nicht signifikant sind, d.h. dass die gemachten Näherungen berechtigt sind.
- S6.8 Fehlanpassungsfaktoren ( $M_{Sr}, M_{Sc}, M_{Xr}, M_{Xc}$ ):** Da das Transfornormalsystem keine vollkommene Anpassung aufweist und die Phase der Reflexionsfaktoren des Transfornormals, des zu kalibrierenden Leistungsmesskopfes und des Referenzleistungsmesskopfes nicht bekannt sind, besteht eine Unsicherheit aufgrund möglicher Fehlanpassungen für die einzelnen Messköpfe bei der Bezugs- und der Kalibrierfrequenz. Die entsprechenden Grenzen der Abweichungen werden sowohl für die Bezugs- als auch für die Kalibrierfrequenz aus der folgenden Beziehung bestimmt:

$$M_{s,x} = 1 \pm 2 \left| \Gamma_G \right| \left| \Gamma_{s,x} \right| \quad (\text{S6.3})$$

Die Reflexionsfaktoren des TransfERNORMALS, des zu kalibrierenden Leistungsmesskopfes und des Referenzleistungsmesskopfes besitzen die folgenden Beträge:

	50 MHz	18 GHz
$ \Gamma_G $	0,02	0,07
$ \Gamma_X $	0,02	0,12
$ \Gamma_S $	0,02	0,10

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der einzelnen Anteile ist U-förmig. Dies wird berücksichtigt, indem bei der Berechnung der Varianz aus dem Quadrat der aus den Grenzen ermittelten Halbwertsbreite der Faktor 1/3 für eine Rechteckverteilung durch den für die U-förmige Verteilung gültigen Faktor 1/2 ersetzt wird. Die auf Fehlanpassung zurückzuführende Standardmessunsicherheit wird daher gewonnen aus:

$$u(M_{S,X}) = \frac{2|\Gamma_G||\Gamma_S|}{\sqrt{2}} \quad (S6.4)$$

Anmerkung: Die Werte der Reflexionsfaktoren sind das Ergebnis von Messungen, die selbst mit Unsicherheiten behaftet sind. Dies wird berücksichtigt, indem die Quadratwurzel der quadrierten Summe der Messunsicherheit und der zum Quadrat erhobene gemessene Wert addiert werden.

**S6.9 Korrelation:** Die Eingangsgrößen der Auswertung werden als unkorreliert angesehen.

**S6.10 Beobachtungen:** Es werden drei getrennte Ablesungen vorgenommen. Dafür werden sowohl der Bezugsmesskopf als auch der zu kalibrierende Messkopf an das Transfernormal angeschlossen und wieder von ihm getrennt, um so die Reproduzierbarkeit der Leitungsverbindung einzuschließen. Die für die Berechnung des beobachteten Leistungsverhältnisses  $p$  verwendeten Anzeigen des Leistungsmessers sind:

Beob. Nr.	$p_{Sr}$	$p_{Sc}$	$p_{Xr}$	$p_{Xc}$	$p$
1	1,0001	0,9924	1,0001	0,9698	0,9772
2	1,0000	0,9942	1,0000	0,9615	0,9671
3	0,9999	0,9953	1,0001	0,9792	0,9836

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{p} = 0,976$$

Empirische Standardabweichung:

$$s(p) = 0,0083$$

Standardmessunsicherheit

$$u(p) = s(\bar{p}) = \frac{0,0083}{\sqrt{3}} = 0,0048$$

### S6.11 Messunsicherheitsbudget ( $K_X$ )

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$K_S$	0,957	0,0055	Normal	0,976	0,00537
$\delta K_D$	-0,001	0,0012	Rechteck	0,976	0,00113
$M_{Sr}$	1,000	0,0006	U-förmig	0,933	0,00053
$M_{Sc}$	1,000	0,0099	U-förmig	-0,933	0,00924
$M_{Xr}$	1,000	0,0006	U-förmig	-0,933	-0,00053
$M_{Xc}$	1,000	0,0119	U-förmig	0,933	0,01110
$p_{Cr}$	1,000	0,0014	Normal	0,933	0,00132
$p_{Cc}$	1,000	0,0001	Normal	0,933	0,00013
$p$	0,976	0,0048	Normal	0,956	0,00459
$K_X$	0,933				0,01623

### S6.12 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(K_X) = 2 \cdot 0,0162 \cong 0,032$$

### S6.13 Vollständiges Messergebnis

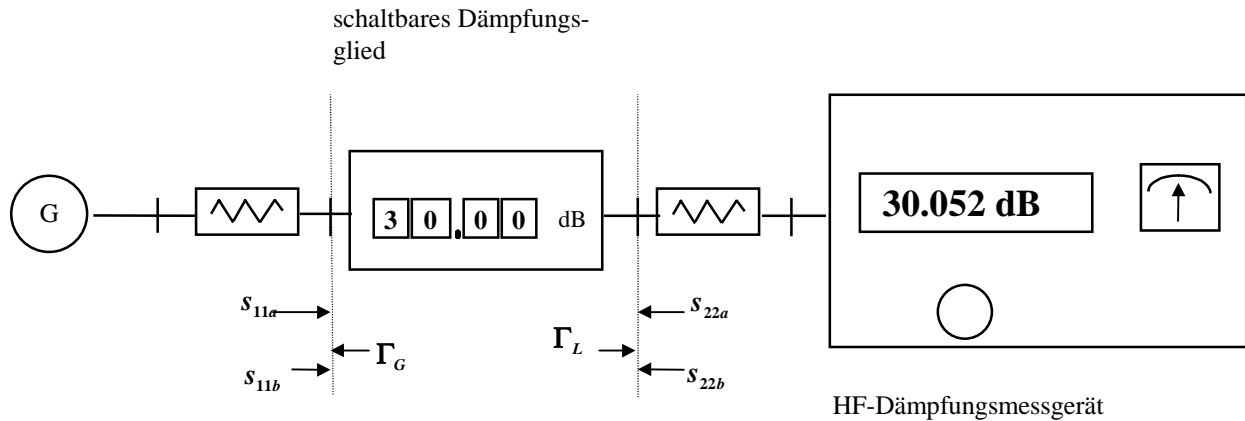
Der Kalibrierungsfaktor des Leistungsmesskopfes bei 18 GHz ist  $0,933 \pm 0,032$ . Dieser Wert wird häufig in der Form  $(93,3 \pm 3,2) \%$  ausgedrückt.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

## S7 Kalibrierung eines schaltbaren koaxialen Dämpfungsgliedes für einen Dämpfungsschritt von 30 dB

**S7.1** Die Kalibrierung des schaltbaren koaxialen Dämpfungsgliedes erfolgt bei 10 GHz mit Hilfe eines Dämpfungsmesssystems, das ein kalibriertes schaltbares Dämpfungsglied enthält, das als Referenznormal dient. Die Messmethode ermittelt die Dämpfung zwischen angepasster Quelle und angepasster Last. Das zu kalibrierende Dämpfungsglied wird zwischen den Einstellungen 0 dB und 30 dB geschaltet; dabei wird der Dämpfungswert des Dämpfungsschrittes ermittelt. Das Dämpfungsmesssystem besitzt eine Digitalanzeige für den Dämpfungswert und einen analogen Nullindikator für die Anzeige des abgeglichenen Zustandes.

## S7.2 Schematische Darstellung des Messsystems



**S7.3** Die Dämpfung  $L_X$  des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes folgt aus der Beziehung:

$$L_X = L_S + \delta L_S + \delta L_D + \delta L_M + \delta L_K + \delta L_{1b} - \delta L_{1a} + \delta L_{0b} - \delta L_{0a} \quad (\text{S7.1})$$

mit:

- $L_S = L_{1b} - L_{1a}$  - Dämpfungsdifferenz der Bezugsdämpfungsleitung, ergibt sich aus:
- $L_{1a}$  - dem angezeigten Dämpfungswert für das auf 0 dB eingestellte, zu kalibrierende Dämpfungsglied
- $L_{1b}$  - dem angezeigten Dämpfungswert für das auf 30 dB eingestellte, zu kalibrierende Dämpfungsglied
- $\delta L_S$  - Korrektur aufgrund der Kalibrierung der Bezugsdämpfungsleitung
- $\delta L_D$  - durch Drift bedingte Änderung der Dämpfung der Bezugsdämpfungsleitung seit ihrer letzten Kalibrierung
- $\delta L_M$  - Korrektur bezüglich einer zusätzlichen Dämpfung durch Fehlanpassung
- $\delta L_K$  - Korrektur bezüglich Übersprechens zwischen Ein- und Ausgang des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes
- $\delta L_{1a}, \delta L_{1b}$  - Korrekturen bezüglich der begrenzten Auflösung des Referenzmesskopfes bei 0 dB und 30 dB
- $\delta L_{0a}, \delta L_{0b}$  - Korrekturen bezüglich der begrenzten Auflösung des Nullindikators bei 0 dB und 30 dB

**S7.4 Bezugsdämpfungsleitung ( $\delta L_S$ ):** Der Kalibrierschein für die Bezugsdämpfungsleitung gibt einen Dämpfungswert für die 30,000 dB-Einstellung bei 10 GHz von 30,003 dB mit einer beigeordneten erweiterten Messunsicherheit von 0,005 dB (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) an. Die Korrektur von +0,003 dB mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit von 0,005 dB (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) wird für Dämpfungseinstellungen der Bezugsdämpfungsleitung angesetzt, die nicht mehr als  $\pm 0,1$  dB von der kalibrierten Einstellung von 30,000 dB abweichen.

**S7.5 Drift der Referenz ( $\delta L_D$ ):** Die Drift des Dämpfungswertes der Bezugsdämpfungsleitung wird aufgrund ihrer Kalibrierungsgeschichte auf Null mit Grenzen von  $\pm 0,002$  dB für die maximalen Abweichungen abgeschätzt.

**S7.6 Fehlanpassungsverlust ( $\delta L_M$ ):** Die Reflexionsfaktoren der Quelle und der Last im Einfügungspunkt des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes sind durch Impedanzanpassung auf möglichst kleine Beträge optimiert worden. Ihre Beträge und die Beträge der Streukoeffizienten des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes sind gemessen worden, ihre Phase ist jedoch nicht bekannt. Ohne Phaseninformationen kann eine Korrektur bezüglich eines Fehlanpassungsfehlers nicht vorgenommen werden; die durch die unvollständige Kenntnis der Anpassung bedingte Standardmessunsicherheit (in dB) wird mit der folgenden Beziehung [1] bestimmt:

$$u(\delta L_M) = \frac{8.686}{\sqrt{2}} \sqrt{|\Gamma_S|^2 (|s_{11a}|^2 + |s_{11b}|^2) + |\Gamma_L|^2 (|s_{22a}|^2 + |s_{22b}|^2) + |\Gamma_S|^2 \cdot |\Gamma_L|^2 (|s_{21a}|^4 + |s_{21b}|^4)} \quad (\text{S7.2})$$

Mit den Reflexionsfaktoren von Quelle und Last

$$\Gamma_L = 0,03 \quad \text{und} \quad \Gamma_S = 0,03$$

und den Streukoeffizienten des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes (bei 10 GHz)

	0 dB	30 dB
$s_{11}$	0,05	0,09
$s_{22}$	0,01	0,01
$s_{21}$	0,95	0,031

ergibt sich eine Standardmessunsicherheit von  $u(\delta L_M) = 0,02$  dB .

Anmerkung: Die Werte der Streukoeffizienten und Reflexionsfaktoren sind die Ergebnisse von Messungen. Sie sind deshalb auch nicht exakt bekannt. Dies wird durch Addition der Quadratwurzel der quadrierten Summe der Messunsicherheit und des Quadrates des jeweiligen Messwertes berücksichtigt.

**S7.7 Korrektur für Übersprechen ( $\delta L_K$ ):** Übersprecheffekte werden in dem zu kalibrierenden Dämpfungsglied aus Messungen bei der 0 dB-Einstellung auf mindestens 100 dB kleiner als das Messsignal abgeschätzt. Eine Korrektur aufgrund von Übersprecheffekten bei der 30 dB-Einstellung wird aus diesen Ergebnissen auf maximal  $\pm 0,003$  dB abgeschätzt.

**S7.8 Auflösung der Einstellung der Bezugsdämpfungsleitung ( $\delta L_{1a}, \delta L_{1b}$ ):** Die digitale Anzeige der Bezugsdämpfungsleitung hat eine Auflösung von 0,001 dB, aus der die Korrektur bezüglich der Auflösung auf  $\pm 0,0005$  dB abgeschätzt wird.

**S7.9 Auflösung des Nullindikators ( $\delta L_{0a}, \delta L_{0b}$ ):** Die Auflösung des Nullindikators des Dämpfungsmessgerätes wurde aus einer früheren Messung abgeleitet. Unter der Annahme einer Normalverteilung ergibt sich eine Standardabweichung von 0,002 dB bei jeder Anzeige.

**S7.10 Korrelation:** Die Eingangsgrößen der Auswertung werden als unkorreliert angesehen.

**S7.11 Beobachtungen:** Der 30 dB-Dämpfungsschritt wurde aus vier Beobachtungen der 0 dB- und der 30 dB-Einstellung des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes gewonnen:

Beob.Nr.	Beobachtete Werte bei der	
	0 dB-Einstellung	30 dB-Einstellung
1	0,000 dB	30,033 dB
2	0,000 dB	30,058 dB
3	0,000 dB	30,018 dB
4	0,000 dB	30,052 dB

Arithmetischer Mittelwert:  $\bar{L}_S = 30,040$  dB

Empirische Standardabweichung:  $s(L_S) = 0,018$  dB

Standardmessunsicherheit  $u(L_S) = s(\bar{L}_S) = \frac{0,018 \text{ dB}}{\sqrt{4}} = 0,009$  dB

### S7.12 Messunsicherheitsbudget ( $L_X$ ):

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$L_S$	30,040 dB	0,0090 dB	Normal	1,0	0,0090 dB
$\delta L_S$	0,003 dB	0,0025 dB	Rechteck	1,0	0,0025 dB
$\delta L_D$	0 dB	0,0011 dB	U-förmig	1,9	0,0011 dB
$\delta L_M$	0 dB	0,0200 dB	U-förmig	1,0	0,0200 dB
$\delta L_K$	0 dB	0,0017 dB	U-förmig	1,0	0,0017 dB
$\delta L_{1a}$	0 dB	0,0003 dB	U-förmig	-1,0	-0,0003 dB
$\delta L_{1b}$	0 dB	0,0003 dB	Rechteck	1,0	0,0019 dB
$\delta L_{0a}$	0 dB	0,0020 dB	Rechteck	-1,0	0,0020 dB
$\delta L_{0b}$	0 dB	0,0020 dB	Normal	1,0	-0,0020 dB
$L_X$	30,043 dB				0,0224 dB

### S7.13 Erweiterte Messunsicherheit:

$$U = k \cdot u(L_X) = 2 \cdot 0,0224 \text{ dB} \cong 0,045 \text{ dB}$$

### S7.14 Vollständiges Messergebnis

Der Messwert der Dämpfungsleitung für eine Einstellung von 0 dB bei 10 GHz ist  $(30,043 \pm 0,045) \text{ dB}$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

### S7.15 Literaturhinweis

- [1] Harris, I.A.; Warner, F.L.: *Re-examination of mismatch uncertainty when measuring microwave power and attenuation*. In: IEE Proc., Bd. 128, Pt.H, Nr. 1, Februar 1981



---

**DKD-3-E2**      **Angabe der Messunsicherheit  
bei Kalibrierungen**  
Ergänzung 2 – Zusätzliche Beispiele

---

Herausgegeben von der Akkreditierungsstelle des Deutschen Kalibrierdienstes (DKD) bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB).

Copyright © 2002 by DKD

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

## Deutscher Kalibrierdienst (DKD)

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen zusammengeschlossen. Sie werden von der Akkreditierungsstelle des DKD bei der PTB akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten DKD-Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kalibrierungen durch DKD-Laboratorien geben dem Anwender Sicherheit für die Verlässlichkeit von Messergebnissen, erhöhen das Vertrauen der Kunden und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem nationalen und internationalen Markt und dienen als messtechnische Grundlage für die Mess- und Prüfmittelüberwachung im Rahmen von Qualitätssicherungsmaßnahmen.

Im DKD werden Kalibriermöglichkeiten für elektrische Messgrößen, für Länge, Winkel und weitere geometrische Größen, für Rauheit, Koordinaten- und Formmesstechnik, für Zeit und Frequenz, für Kraft, Drehmoment, Beschleunigung, Druck, Durchfluss, Temperatur, Feuchte, medizinische Messgrößen, akustische Messgrößen, optische Messgrößen, ionisierende Strahlung und weitere Messgrößen angeboten.

**Veröffentlichungen:** siehe Internet

## Anschrift:

Deutscher Kalibrierdienst bei der  
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt  
Bundesallee 100, D-38116 Braunschweig  
Postfach 33 45, D-38023 Braunschweig  
Telefon Sekretariat: (05 31) 5 92-19 01  
Fax: (05 31) 5 92-19 05  
E-Mail: [dkd@ptb.de](mailto:dkd@ptb.de)  
Internet: [www.dkd.info](http://www.dkd.info)

---

**Übersetzung des Abschnittes Supplement 2, Examples der Publikation EA-4/02,  
„Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“, rev 00, Dez. 1999**

**Inhaltsverzeichnis**

	Seite
S8 Einleitung	4
S9 Kalibrierung eines tragbaren Digital-Multimeters bei einer Gleichspannung von 100 V	7
S10 Kalibrierung eines Messschiebers	11
S11 Kalibrierung eines Temperatur-Blockkalibrators bei einer Temperatur von 180 °C	16
S12 Kalibrierung eines Haushalts-Wasserzählers	20
S13 Kalibrierung eines Lehrings mit einem Nenndurchmesser von 90 mm	24

**Nationales Vorwort**

Die vorliegende Beispielsammlung DKD-3-E-2 ergänzt die Schrift DKD-3, Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen, und die bereits 1998 erschienene Beispielsammlung DKD-3-E1. DKD-3-E2 ist die deutsche Übersetzung des im Dezember 1999 erschienenen Supplement 2 der Publikation EA-4/02, Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration. Offensichtliche Druckfehler wurden in der Übersetzung korrigiert.

Die Beispielsammlung soll die Umsetzung der in DKD-3 dargestellten Methode zur Ermittlung der Messunsicherheit erleichtern.

Zusätzliche Beispiele aus den Kalibrierlaboratorien und den Fachausschüssen des DKD sind weiterhin willkommen.

## **S8 Einleitung**

- S8.1** Die folgenden Beispiele wurden ausgewählt, um das Verfahren zur Ermittlung der Messunsicherheit weiter zu verdeutlichen. Sie vervollständigen die in Ergänzung 1 zur EA-4/02 (früher: EAL-R2) (1. Auflage, November 1997) angegebenen Beispiele. Die vorliegende Beispielsammlung konzentriert sich auf Situationen, in denen ein oder zwei Unsicherheitsbeiträge in der Unsicherheitsanalyse dominieren oder in denen die Anzahl der Wiederholungsmessungen klein ist.
- S8.2** Die Beispiele sollen in der Praxis auftretende Situationen veranschaulichen. Es wird jedoch betont, dass es bei praktischen Anwendungen nicht erforderlich ist, die in diesen Beispielen angegebenen mathematischen Herleitungen nachzuvollziehen, insbesondere nicht die in den mathematischen Anmerkungen zu einigen Beispielen. Dem Benutzer wird vielmehr empfohlen, die Ergebnisse der theoretischen Darstellungen zu verwenden, nachdem er sich mit den Bedingungen, die erfüllt werden müssen, vertraut gemacht hat. Wenn z.B. in einer gegebenen Situation festgestellt wird, dass das Messergebnis eine rechteckförmige Verteilung hat (wie es der Fall wäre, wenn nur ein rechteckförmig verteilter Beitrag aufträte, der bei der Unsicherheitsfortpflanzung berücksichtigt werden müsste), kann man sofort folgern, dass ein Erweiterungsfaktor von  $k = 1,65$  angewendet werden muss, wenn eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % erreicht werden soll (siehe S9.14).
- S8.3** Einen Schluss, den man generell für die Fortpflanzung der Messunsicherheit ziehen kann, ist, dass im Falle von nur einem dominierenden Beitrag dessen Verteilungstyp auch für das Messergebnis gilt. Um die Unsicherheit des Messergebnisses zu ermitteln, muss jedoch wie üblich der entsprechende Sensitivitätskoeffizient benutzt werden.
- S8.4** Es ist anzumerken, dass die Situation, in der die Messunsicherheit nur einen oder einige dominierende Beiträge enthält, oft im Zusammenhang mit einfacheren Messgeräten auftritt, bei denen der dominierende Beitrag häufig aus ihrer begrenzten Auflösung resultiert. Es mag daher paradox erscheinen, dass die Behandlung der Messunsicherheit bei einfacheren Geräten - wie durch die Beispiele dieser Ergänzung dargestellt - aufwendiger als die Behandlung der einfacheren Beispiele in der Ergänzung 1 ist. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass die mathematischen Ableitungen, die als schwierig empfunden werden können, nicht in das Hauptdokument aufgenommen wurden, sondern aus didaktischen Gründen an den Stellen eingefügt sind, an denen sie benötigt werden.
- S8.5** Die Beispiele beruhen auf Entwürfen, die von Expertengruppen der EA erstellt wurden. Diese Entwürfe sind vereinfacht und aufeinander abgestimmt worden, um sie für das Laborpersonal in allen Gebieten der Kalibrierung transparent zu machen. Es wird daher erwartet, dass diese Beispiele wie die früheren, die als Ergänzung E1 zu DKD-3 (engl. EA-4/02-S1) veröffentlicht wurden, dazu beitragen, die Einzelheiten der Aufstellung des Modells der Auswertung besser zu verstehen und dadurch unabhängig vom jeweiligen Kalibriergewert zur Vereinheitlichung der Ermittlung der Messunsicherheit beitragen.

- S8.6** Die in den Beispielen angegebenen Werte und Unsicherheitsbeiträge sind nicht als verbindliche oder anzustrebende Anforderungen gedacht. Die Laboratorien müssen die Unsicherheitsbeiträge auf der Grundlage der Modellfunktion bestimmen, die sie bei der Auswertung der von ihnen durchgeführten Kalibrierung benutzen, und die so ermittelte Messunsicherheit auf dem von ihnen ausgestellten Kalibrierschein angeben.
- S8.7** Die Beispiele werden gemäß dem üblichen Schema dargestellt, das in der ersten Ergänzung E1 zu DKD-3 (engl. EA-4/02-S1) vorgestellt und eingeführt wurde. Einzelheiten findet der Leser im Abschnitt S1.4 dieses Dokuments.
- S8.8** Die Unsicherheitsanalyse in den Beispielen soll die Grundlagen der jeweiligen Messung und die Methode zur Ermittlung des Messergebnisses und der beigeordneten Messunsicherheit darstellen. Um die Analyse auch für diejenigen transparent zu gestalten, die keine Experten auf dem betreffenden Gebiet der Metrologie sind, ist eine einheitliche Nomenklatur für die Wahl der Größensymbole angewendet worden, die mehr auf den physikalischen Hintergrund als auf die in verschiedenen Gebieten übliche Praxis abzielt.
- S8.9** In allen Fällen treten wiederholt mehrere Größen der gleichen Art auf. Eine von ihnen ist die Messgröße, d.h. die zu messende Größe; eine andere ist die durch das Gebrauchsnormale bereitgestellte Größe, die die lokal realisierte Einheit darstellt; an diese Größe wird die Messgröße angeschlossen. Neben diesen beiden Größen gibt es in allen Fällen noch weitere, die die Rolle zusätzlicher lokaler Größen oder Korrekturen übernehmen.
- S8.10** Korrekturen beschreiben die unvollkommene Übereinstimmung zwischen einer Messgröße und dem Ergebnis einer Messung. Einige der Korrekturen sind durch vollständige Messergebnisse gegeben, d.h. einen Messwert und die beigeordnete Messunsicherheit. Bei anderen wird die Verteilung der Werte aus der mehr oder weniger vollständigen Kenntnis ihrer Natur abgeleitet. In den meisten Fällen führt das zu einer Schätzung eingrenzender Werte für die unbekannten Abweichungen.
- S8.11** In bestimmten Fällen wird die durch ein Gebrauchsnormale dargestellte Größe durch den Nennwert des Normals charakterisiert. Daher werden häufig Nennwerte, die verallgemeinernd gesagt Kalibrierartefakte charakterisieren oder identifizieren, in die Unsicherheitsanalyse einbezogen.
- S8.12** Um bei den mathematischen Modellen der Auswertung zwischen diesen beiden Konzepten zu unterscheiden, sind die Beispiele so gestaltet, dass sie den nachstehenden Bezeichnungsregeln folgen. Es ist jedoch offensichtlich, dass es nicht möglich ist, diesen Regeln strikt zu folgen, weil in den verschiedenen Gebieten der Metrologie der Gebrauch von Symbolen unterschiedlich gehandhabt wird.
- S8.13** Die hier angewendete Bezeichnungsweise unterscheidet zwischen Hauptwerten, Nennwerten, Korrekturen und Grenzwerten:

Hauptwerte sind gemessene oder beobachtete Werte, die einen wesentlichen Beitrag zum Wert einer Messgröße liefern. Sie werden durch kursive Kleinbuchstaben dargestellt; stellt die Größe eine Differenz dar, wird ihnen ein großes griechisches Delta vorangestellt.

BEISPIEL:

$t_{iX}$  - von einem zu kalibrierenden Thermometer X angezeigte Temperatur  
(Index i bedeutet angezeigt)

$\Delta l_{iS}$  - beobachtete Längendifferenz bei der Verschiebung mittels einer Messspindel.

Nennwerte<sup>1</sup> sind festgelegte Werte für die Darstellung einer Größe durch ein Normal oder ein Messgerät. Sie sind genäherte Werte, die den Hauptanteil des dargestellten Werts angeben. Sie werden durch kursive Großbuchstaben gekennzeichnet.

BEISPIEL:

$L$  - Nennlänge eines zu kalibrierenden Endmaßes.

Korrekturen geben von den Hauptwerten kleine Abweichungen an, die bekannt sind oder geschätzt werden müssen. In den meisten Fällen sind sie additiv. Sie werden durch das für die betrachtete Größe gewählte Symbol dargestellt, dem ein kleines griechisches Delta vorangestellt wird.

BEISPIEL:

$\delta m_D$  - mögliche Abweichung auf Grund der Drift des Werts eines Referenzgewichtstücks seit der letzten Kalibrierung

$\delta m_C$  - Korrektur für außermittige Last und magnetische Effekte bei der Kalibrierung eines Gewichtstücks.

Grenzwerte sind geschätzte, feste Werte, die den Bereich charakterisieren, in dem unbekannte Werte einer Größe liegen können. Sie werden durch das für die betrachtete Größe gewählte Symbol dargestellt, dem ein großes griechisches Delta vorangestellt wird.

BEISPIEL:

$\Delta \alpha_X$  - geschätzte Halbweite des Intervalls der möglichen Abweichungen des linearen thermischen Widerstandskoeffizienten, die in einer Herstellerspezifikation für einen zu kalibrierenden Widerstand angegeben ist.

Wie in den Beispielen gezeigt, erfolgt die Unterscheidung verschiedener Größen derselben Art durch Indizes. Dabei wird die international vereinbarte Schreibweise für physikalische Größen benutzt: Indizes, die physikalische Größen darstellen, werden kursiv, Indizes, die Artefakte, Geräte usw. benennen, in steiler, senkrechter Schrift geschrieben.

<sup>1</sup> Anm. des Übersetzers: Der Begriff Nennwert ist im VIM unter 5.3 definiert als „Gerundeter Wert oder Näherungswert eines Merkmals eines Messgeräts, der auf seinen Gebrauch hinweist“. Hier wird er in dem Sinne allgemeiner benutzt, das die Beschränkung auf ein Merkmal eines Messgerätes fallen gelassen wird. Unter Nennwert wird hier ein gerundeter Wert oder Näherungswert verstanden, der innerhalb der Auswertung einer Messung ein Merkmal mit ausreichender Genauigkeit kennzeichnet, so dass Abweichungen unberücksichtigt bleiben können.

**S8.14** Referenzwerte werden durch ein Größensymbol mit dem Index Null gekennzeichnet.

BEISPIEL:

$p_0$  - Referenzdruck, z.B. von 1000 mbar.

**S8.15** Verhältnisse zwischen Größen derselben Art (dimensionslose Verhältnisse) werden durch kursive Kleinbuchstaben dargestellt.

BEISPIEL:

$r = R_{iX} / R_{iN}$  - Verhältnis zwischen dem angezeigten Widerstandswert eines unbekannten Widerstands und dem Widerstandswert eines Referenzwiderstands (Index i bedeutet angezeigt).

**S8.16** Bei Verwendung mehrerer Indizes wird ihre Reihenfolge so gewählt, dass der allgemeinere Begriff weiter links und der speziellere Begriff weiter rechts indiziert wird.

BEISPIEL:

$V_{i1}, V_{i2}$  - von Voltmeter 1 bzw. 2 angezeigte Spannung (Index i bedeutet angezeigt).

**S8.17** Den Beispielen in dieser zweiten Ergänzung zu DKD-3 (engl. EA-4/02) sollen weitere Beispiele folgen, die verschiedene in Zusammenhang mit der Kalibrierung von Messgeräten auftretende Aspekte veranschaulichen. Beispiele sind auch in EAL- und EA-Leitfäden<sup>2</sup> zu finden, die sich mit der Kalibrierung spezieller Messgerätearten befassen.

## **S9 Kalibrierung eines tragbaren Digital-Multimeters bei einer Gleichspannung von 100 V**

**S9.1** Als Teil einer allgemeinen Kalibrierung wird ein tragbares Digital-Multimeter (DMM) bei einer Eingangs-Gleichspannung von 100 V mit einem Multifunktionskalibrator als Gebrauchsnorm kalibriert. Das folgende Messverfahren wird angewendet:

- (1) Die Ausgangsklemmen des Kalibrators werden mittels geeigneter Messkabel an die Eingangsklemmen des DMM angeschlossen.
- (2) Der Kalibrator wird auf 100 V eingestellt und nach einer ausreichenden Stabilisierungszeit wird die DMM-Anzeige abgelesen.
- (3) Die Messabweichung der Anzeige des DMM wird unter Verwendung der DMM-Anzeigen und der Kalibratoreinstellungen berechnet.

**S9.2** Es ist zu beachten, dass die Messabweichung der Anzeige des DMM, die mit diesem Messverfahren gewonnen wird, den Offseteffekt und Linearitätsabweichungen enthält.

---

<sup>2</sup> EA-10/03 (früher EAL-G26), Calibration of Pressure Balances

EA-10/08 (früher EAL-G31), Calibration of Thermocouples

EA-10/09 (früher EAL-G32), Measurement and Generation of Small AC Voltages with Inductive Voltage Dividers

EA-10/10, EA Guidelines on the Determination of Pitch Diameter of Parallel Thread Gauges by Mechanical Probing

**S9.3** Die Messabweichung  $E_X$  der Anzeige des zu kalibrierenden DMM erhält man aus

$$E_X = V_{iX} - V_S + \delta V_{iX} - \delta V_S \quad (\text{S9.1})$$

mit

- $V_{iX}$  - vom DMM angezeigte Spannung (der Index i bedeutet Anzeige),
- $V_S$  - vom Kalibrator erzeugte Spannung,
- $\delta V_{iX}$  - Korrektur der angezeigten Spannung für die endliche Auflösung des DMM,
- $\delta V_S$  - Korrektur der Spannung des Kalibrators:
  - (1) für die Drift seit der letzten Kalibrierung,
  - (2) für Abweichungen aufgrund des kombinierten Effekts von Offset, Nichtlinearität und Verstärkungsdifferenzen,
  - (3) für Abweichungen in der Umgebungstemperatur,
  - (4) für Abweichungen der Netzspannung,
  - (5) für Effekte der Fehlanpassung aufgrund des endlichen Eingangswiderstands des zu kalibrierenden DMM.

**S9.4** Wegen der geringen Auflösung der DMM-Anzeige wird bei den angezeigten Werten keine Streuung beobachtet.

**S9.5 DMM-Anzeigen ( $V_{iX}$ ):** Das DMM zeigt bei der 100-V-Einstellung des Kalibrators die Spannung 100,1 V an. Die DMM-Anzeige wird als präzise angenommen (siehe S9.4).

**S9.6 Gebrauchsnorm ( $V_S$ ):** Der Kalibrierschein für den Multifunktionskalibrator gibt an, dass die erzeugte Spannung der von der Kalibratoreinstellung angezeigte Wert ist und dass die zugehörige relative erweiterte Messunsicherheit  $W = 0,000\,02$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) ist, was eine erweiterte Messunsicherheit von  $U = 0,002\,V$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) für die 100-V-Einstellung ergibt.

**S9.7 Auflösung des zu kalibrierenden DMM ( $\delta V_{iX}$ ):** Die niedrigstwertige Ziffer der DMM-Anzeige entspricht einem Werteschritt<sup>3</sup> von 0,1 V. Jede DMM-Anzeige hat auf Grund der endlichen Auflösung der Anzeige eine Korrektur, die auf 0,0 V mit den Grenzen  $\pm 0,05\,V$  (d.h. der Hälfte des Werteschrittes) geschätzt wird.

**S9.8 Sonstige Korrekturen ( $\delta V_S$ ):** Da individuelle Zahlen nicht verfügbar sind, wird die mit verschiedenen Quellen verbundene Messunsicherheit aus den vom Hersteller des Kalibrators angegebenen Spezifikationen ermittelt. Diese Spezifikationen besagen, dass die vom Kalibrator erzeugte Spannung innerhalb von  $\pm(0,000\,1 \cdot V_S + 1\,mV)$ <sup>4</sup> mit der Einstellung des Kalibrators übereinstimmt, wenn folgende Messbedingungen vorliegen:

<sup>3</sup> Hierfür ist im deutschen Sprachbereich der Ausdruck Skalenteilungswert (SKW) üblich.

<sup>4</sup> Eine weit verbreitete Methode für die Darstellung der Genauigkeitsspezifikation für Messgeräte in Datenblättern oder Handbüchern besteht darin, die Spezifikationsgrenzen als "Einstellungen" anzugeben. Bei dem Kalibrator würde diese Angabe  $\pm(0,01\,\% \text{ der Einstellung} + 1\,mV)$  lauten. Selbst wenn diese Methode als gleichwertig mit der oben angegebenen Angabe angesehen wird, wird sie hier nicht angewendet, weil sie in vielen Fällen irreführend sein kann und weil sie keine Gleichung physikalischer Größen gemäß der international anerkannten Symbolnomenklatur darstellt.



- (1) Die Umgebungstemperatur liegt zwischen 18 °C und 23 °C.
- (2) Die Netzspannung für den Kalibrator liegt zwischen 210 V und 250 V.
- (3) Der Lastwiderstand an den Klemmen des Kalibrators ist größer als 100 kΩ.
- (4) Der Kalibrator wurde vor weniger als einem Jahr kalibriert.

Da diese Messbedingungen erfüllt sind und die Kalibrierhistorie des Kalibrators zeigt, dass man sich auf die Herstellerspezifikation verlassen kann, wird die Korrektur, die an die von dem Kalibrator erzeugte Spannung angelegt werden muss, innerhalb von  $\pm 0,011$  V mit 0,0 V angenommen.

**S9.9 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S9.10 Messunsicherheitsbudget ( $E_x$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$V_{ix}$	100,1 V	-	-	-	-
$V_s$	100,0 V	0,001 V	Normal	-1,0	-0,001 V
$\delta V_{ix}$	0,0 V	0,029 V	Rechteck	1,0	0,029 V
$\delta V_s$	0,0 V	0,0064 V	Rechteck	-1,0	-0,0064 V
$E_x$	0,1 V	0,030 V			

**S9.11 Erweiterte Messunsicherheit:** Die dem Ergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit wird durch den Effekt der endlichen Auflösung des DMM dominiert. Die endgültige Verteilung ist keine Normalverteilung, sondern im Wesentlichen rechteckförmig. Daher ist die in Anhang E zu DKD-3 (engl. EA-4/02) beschriebene Methode der effektiven Freiheitsgrade nicht anwendbar. Der für eine Rechteckverteilung geeignete Erweiterungsfaktor wird aus der in Gl. (S9.8) in dem mathematischen Hinweis S9.14 gegebenen Beziehung errechnet.

$$U = k \cdot u(E_x) = 1,65 \cdot 0,030 \text{ V} = 0,05 \text{ V}$$

**S9.12 Vollständiges Messergebnis:** Die Messabweichung der Anzeige des tragbaren Digitalvoltmeters bei 100 V beträgt  $(0,10 \pm 0,05)$  V.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,65$  ergibt. Sie entspricht bei der angenommenen Rechteckverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S9.13 Zusätzliche Bemerkungen:** Die für die Berechnung des Erweiterungsfaktors angewendete Methode beruht auf der Tatsache, dass die dem Ergebnis beigeordnete Messunsicherheit durch die endliche Auflösung des DMM dominiert wird. Das gilt im Prinzip für die Kalibrierung aller Anzeigergeräte mit geringer Auflösung, vorausgesetzt dass die endliche Auflösung der dominierende Einfluss im Messunsicherheitsbudget ist.

**S9.14 Mathematischer Hinweis:** Liegt eine Messsituation vor, bei der ein Unsicherheitsbeitrag im Messunsicherheitsbudget als dominierender Beitrag - etwa der Beitrag mit dem Index 1 - bezeichnet werden kann, kann die dem Messergebnis  $y$  beizuordnende Standardunsicherheit geschrieben werden als

$$u(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_R^2(y)} . \quad (\text{S9.2})$$

Hier bezeichnet

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=2}^N u_i^2(y)} \quad (\text{S9.3})$$

den Gesamtbeitrag der nicht-dominanten Einflüsse. Solange das Verhältnis des Gesamtbeitrags  $u_R(y)$  der nicht-dominanten Einflüsse zum Unsicherheitsbeitrag  $u_1(y)$  des dominierenden Einflusses nicht größer als 0,3 ist, kann Gl. (S9.2) durch

$$u(y) \cong u_1(y) \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_R(y)}{u_1(y)} \right)^2 \right] \quad (\text{S9.4})$$

angenähert werden. Der relative Fehler der Näherung ist kleiner als  $1,125 \cdot 10^{-3}$ . Die sich aus dem in der Klammer zusammengefassten Faktor in Gl. (S9.4) ergebende maximale relative Änderung in der Standardmessunsicherheit ist nicht größer als 5 %. Dieser Wert liegt innerhalb der für die mathematische Rundung von Messunsicherheiten akzeptierten Toleranz.

Unter diesen Annahmen stimmt die Verteilung der Werte, die der Messgröße zugeordnet werden können, im Wesentlichen mit der sich aus dem bekannten dominanten Beitrag ergebenden Verteilung überein. Aus dieser Verteilungsdichte  $\varphi(y)$  kann die Überdeckungswahrscheinlichkeit  $p$  für jeden Wert der erweiterten Messunsicherheit  $U$  durch die Integralrelation

$$p(U) = \int_{y-U}^{y+U} \varphi(y') dy' \quad (\text{S9.5})$$

bestimmt werden. Die Umkehrung dieser Relation ergibt die erweiterte Messunsicherheit als Funktion der Überdeckungswahrscheinlichkeit  $U = U(p)$  für die gegebene Verteilungsdichte  $\varphi(y)$ . Mit Hilfe dieser Beziehung kann der Erweiterungsfaktor schließlich wie folgt ausgedrückt werden:

$$k(p) = \frac{U(p)}{u(y)}. \quad (\text{S9.6})$$

Beim tragbaren Digital-Voltmeter ist der wesentliche Unsicherheitsbeitrag derjenige, der sich aus der endlichen Auflösung der Anzeige ergibt,  $u_{\delta V_X}(E_X) = 0,029 \text{ V}$ , während der Gesamtbeitrag der nicht-dominanten Einflüsse  $u_R(E_X) = 0,0064 \text{ V}$  beträgt. Das zugehörige Verhältnis beträgt  $u_R(E_X)/u_{\delta V_X}(E_X) = 0,22$ . Daher ist die sich ergebende Verteilung der Werte, die durchaus als Messabweichung der Anzeige bezeichnet werden können, im Wesentlichen rechteckförmig. Die Überdeckungswahrscheinlichkeit für eine Rechteckverteilung ist linear mit der erweiterten Messunsicherheit verknüpft ( $a$  ist die Halbweite der Rechteckverteilung):

$$p = \frac{U}{a}. \quad (\text{S9.7})$$

Die Auflösung dieser Beziehung nach der erweiterten Messunsicherheit  $U$  und das Einsetzen des Ergebnisses zusammen mit dem Ausdruck der Standardmessunsicherheit für eine Rechteckverteilung gemäß Gl. (3.8) der DKD-3 (engl. EA-4/02) ergibt schließlich die Beziehung

$$k(p) = p\sqrt{3}. \quad (\text{S9.8})$$

Bei einer Überdeckungswahrscheinlichkeit  $p = 0,95$ , wie sie in der EA vereinbart ist, beträgt der zugehörige Erweiterungsfaktor demnach  $k = 1,65$ .

## S10 Kalibrierung eines Messschiebers

**S10.1** Ein Messschieber aus Stahl wird gegen Endmaße der Klasse I aus Stahl, die als Gebrauchsnormale dienen, kalibriert. Der Messbereich des Messschiebers beträgt 0 bis 150 mm. Die Auflösung beträgt 0,05 mm (der Skalenteilungswert der Hauptskala beträgt 1 mm, der des Nonius 1/20 mm). Mehrere Endmaße mit Nennlängen im Bereich 0,5 mm bis 150 mm werden für die Kalibrierung verwendet. Sie werden so gewählt, dass die Messpunkte in fast gleichen Abständen voneinander liegen (z.B. 0 mm, 50 mm, 100 mm, 150 mm), aber verschiedene Werte auf der Noniusskala ergeben (z.B. 0,0 mm, 0,3 mm, 0,6 mm, 0,9 mm).

Das Beispiel betrifft den 150-mm-Kalibrierpunkt für die Messung von Außenabmessungen. Vor der Kalibrierung wird der Zustand des Messschiebers mehrfach überprüft. Diese Prüfungen beziehen sich auf die Einschätzung des Abbe-Fehlers, die Qualität der Messflächen (Ebenheit, Parallelität, Rechtwinkligkeit) und die Funktion der Feststelleinrichtung.

**S10.2** Die Messabweichung der Anzeige  $E_X$  des Messschiebers bei der Referenztemperatur  $t_0 = 20^\circ \text{C}$  ergibt sich aus der Beziehung:

$$E_X = l_{iX} - l_S + L_S \cdot \alpha \cdot \Delta t + \delta l_{iX} + \delta l_M \quad (\text{S10.1})$$

mit

- $l_{iX}$  - Anzeige des Messschiebers,
- $l_s$  - Länge des benutzten Endmaßes,
- $L_s$  - Nennlänge des benutzten Endmaßes,
- $\bar{\alpha}$  - mittlerer Wärmeausdehnungskoeffizient des Materials des Messschiebers und des Endmaßes,
- $\Delta t$  - Temperaturunterschied zwischen Messschieber und Endmaß,
- $\delta l_{iX}$  - Korrektur für endliche Auflösung der Messschieber,
- $\delta l_M$  - Korrektur für mechanische Effekte wie aufgebrachte Messkraft, Abbe-Fehler, Ebenheits- und Parallelitätsabweichung der Messflächen.

**S10.3 Gebrauchsnormale ( $l_s, L_s$ ):** Die Längen der als Gebrauchsnormale verwendeten Bezugsendmaße werden zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit im Kalibrierschein angegeben. Dieser Schein bestätigt, dass die Endmaße den Anforderungen für Endmaße der Klasse I gemäß DIN EN ISO 3650 entsprechen, d.h. dass das Mittenmaß der Endmaße innerhalb von  $\pm 0,8 \mu\text{m}$  mit der Nennlänge übereinstimmt. Bei den Istlängen der Endmaße werden die Nennlängen ohne Korrektur verwendet, wobei die Toleranzgrenzen als obere und untere Grenze des Variabilitätsbereiches genommen werden.

**S10.4 Temperatur ( $\Delta t, \bar{\alpha}$ ):** Nach einer ausreichenden Temperierzeit sind die Temperaturen des Messschiebers und des Endmaßes innerhalb  $\pm 2 \text{ }^\circ\text{C}$  gleich. Der mittlere Wärmeausdehnungskoeffizient ist  $11,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  (Die Unsicherheit des mittleren Wärmeausdehnungskoeffizienten und der Differenz der Wärmeausdehnungskoeffizienten ist nicht berücksichtigt worden; ihr Einfluss wird im vorliegenden Fall als vernachlässigbar angesehen. Siehe DKD-3-E1 (engl. EA-4/02-S1), Beispiel S4.).

**S10.5 Auflösung des Messschiebers ( $\delta l_{iX}$ ):** Die Skalenteilung der Noniusskala beträgt 0,05 mm. Daher wird angenommen, dass den abgelesenen Werten aufgrund der endlichen Auflösung eine Rechteckverteilung mit der Halbweite  $\pm 25 \mu\text{m}$  zuzuordnen ist.

**S10.6 Mechanische Effekte ( $\delta l_M$ ):** Diese Effekte umfassen die aufgebrachte Messkraft, den Abbe-Fehler und das Spiel zwischen der Führungsschiene und dem beweglichen Messschnabel. Zusätzliche Effekte können verursacht werden, wenn die Messflächen nicht ausreichend eben, nicht parallel zueinander und nicht rechtwinklig zur Führung sind. Um den Aufwand zu minimieren, wird nur der Gesamtbereich der möglichen Abweichungen, die innerhalb  $\pm 50 \mu\text{m}$  liegen, berücksichtigt.

**S10.7 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S10.8 Messungen ( $l_{iX}$ ):** Die Messung wird mehrfach wiederholt, ohne dass bei den Beobachtungen eine Streuung festgestellt wird. Die Unsicherheit aufgrund begrenzter Wiederholpräzision liefert demnach keinen Beitrag. Das Messergebnis für das 150-mm-Endmaß beträgt 150,10 mm.

### S10.9 Messunsicherheitsbudget ( $E_X$ ):

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$l_{iX}$	150,10 mm	-	-	-	-
$l_s$	150,00 mm	0,46 $\mu\text{m}$	Rechteck	-1,0	-0,46 $\mu\text{m}$
$\Delta t$	0	1,15 K	Rechteck	1,7 $\mu\text{m K}^{-1}$	2,0 $\mu\text{m}$
$\delta l_{iX}$	0	15 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	15 $\mu\text{m}$
$\delta l_M$	0	29 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	29 $\mu\text{m}$
$E_X$	0,10 mm	33 $\mu\text{m}$			

**S10.10 Erweiterte Messunsicherheit:** Die dem Ergebnis beizuordnende Messunsicherheit wird durch die von der Messkraft und der endlichen Auflösung der Noniusskala herrührenden Einflüsse dominiert. Daraus resultiert keine Normalverteilung, sondern eine im Wesentlichen trapezförmige mit einem Verhältnis  $\beta = 0,33$  der Halbweite des Plateaubereichs zur Halbweite des gesamten Variationsbereichs. Daher ist die in Anhang E von DKD-3 (engl. EA-4/02) beschriebene Methode der effektiven Freiheitsgrade nicht anwendbar. Der aus dieser Trapezverteilung abgeleitete Erweiterungsfaktor  $k = 1,83$  ergibt sich aus Gl. (S10.10) des Abschnitts S10.13 (Mathematischer Hinweis). Daher ist

$$U = k \cdot u(E_X) = 1,83 \cdot 0,033 \text{ mm} \cong 0,06 \text{ mm}$$

### S10.11 Vollständiges Messergebnis:

Am Kalibrierpunkt 150 mm beträgt die Messabweichung der Anzeige des Messschiebers  $(0,10 \pm 0,06) \text{ mm}$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,83$  ergibt. Sie entspricht bei der angenommenen Trapezverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S10.12 Zusätzliche Bemerkung:** Die für die Berechnung des Erweiterungsfaktors verwendete Methode ist darauf zurückzuführen, dass die dem Ergebnis beigeordnete Messunsicherheit durch zwei Einflüsse dominiert wird: die mechanischen Effekte und die endliche Auflösung der Noniusskala.

Daher ist es nicht gerechtfertigt eine Normalverteilung für die Ausgangsgröße anzunehmen, und die Bedingungen von DKD-3 (engl. EA-4/02), Absatz 5.6 sind anwendbar. Im Hinblick darauf, dass Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsdichten in der Praxis nur auf 3 % bis 5 % genau bestimmt werden können, ist die Verteilung im Wesentlichen als trapezförmig anzusehen; sie wird durch Faltung der zwei den dominanten Einflüssen zugeordneten Rechteckverteilungen gewonnen. Die Halbweiten der unteren und der oberen Seite des sich ergebenden symmetrischen Trapezes sind 75  $\mu\text{m}$  bzw. 25  $\mu\text{m}$ ; in diesem Falle liegen 95 % der Fläche des Trape-

zes innerhalb von  $\pm 60 \mu\text{m}$  um seine Symmetrieachse, dies entspricht dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,83$ .

**S10.13 Mathematischer Hinweis:** Ist die Messsituation so beschaffen, dass zwei Unsicherheitsbeiträge im Messunsicherheitsbudget dominieren, kann die in Abschnitt S9.14 vorgestellte Methode angewendet werden, wenn die beiden dominanten Beiträge - z.B. die Unsicherheitsbeiträge mit den Indizes 1 und 2 - zu einem Gesamtbeitrag zusammengefasst werden. Die Standardmessunsicherheit für das Messergebnis  $y$  kann in diesem Fall in der Form

$$u(y) = \sqrt{u_0^2(y) + u_R^2(y)} \quad (\text{S10.2})$$

geschrieben werden, wobei

$$u_0(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y)} \quad (\text{S10.3})$$

den Gesamtbeitrag der beiden dominanten Einflüsse und

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=3}^N u_i^2(y)} \quad (\text{S10.4})$$

den Gesamtbeitrag der verbleibenden nicht-dominanten Einflüsse bezeichnen. Wenn die beiden dominanten Unsicherheitsbeiträge von Rechteckverteilungen mit Halbwerten  $a_1$  und  $a_2$  herrühren, resultiert aus ihrer Faltung eine symmetrische Trapezverteilung mit den Halbwerten

$$a = a_1 + a_2 \text{ und } b = |a_1 - a_2| \quad (\text{S10.5})$$

der unteren bzw. der oberen Seite (siehe Beispiel in Bild 1).

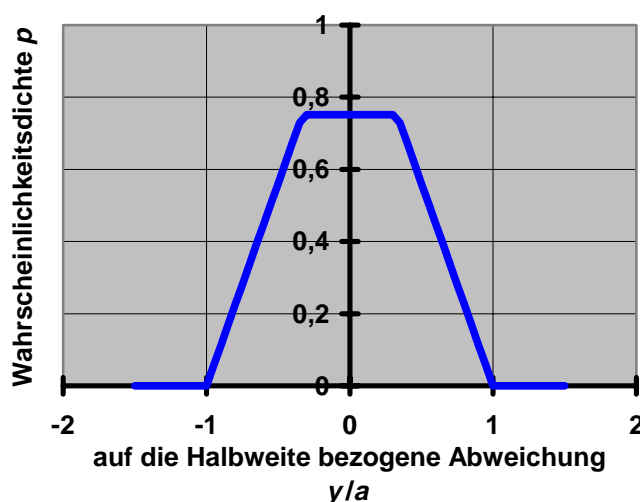


Bild 1: Auf die Halbwerte bezogene symmetrische trapezförmige Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Wert  $\beta = 0,33$  des Knickpunktparameters, die sich aus der Faltung von zwei Rechteckverteilungen ergibt.

Die Verteilung kann in der Form

$$\varphi(y) = \frac{1}{a(1+\beta)} \cdot \begin{cases} 1 & |y| < \beta \cdot a \\ \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) & \beta \cdot a \leq |y| \leq a \\ 0 & a < |y| \end{cases} \quad (\text{S10.6})$$

ausgedrückt werden. Das Verhältnis der Längen der oberen und der unteren Trapezseite wird als Knickpunktparameter bezeichnet und es gilt:

$$\beta = \frac{b}{a} = \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2} \quad (\text{S10.7})$$

Das Quadrat der aus der Trapezverteilung in Gl. (S10.6) ermittelten Standardmessunsicherheit (d.h. die Varianz) ist

$$u^2(y) = \frac{a^2}{6} (1 + \beta^2). \quad (\text{S10.8})$$

Aus der Verteilung in Gl. (S10.6) wird die Abhängigkeit des Erweiterungsfaktors von der Überdeckungswahrscheinlichkeit gemäß der im Abschnitt S9.14 beschriebenen Methode hergeleitet.

$$k(p) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}} \cdot \begin{cases} \frac{p(1+\beta)}{2} & \frac{p}{2-p} < \beta \\ 1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)} & \beta \leq \frac{p}{2-p} \end{cases}. \quad (\text{S10.9})$$

Bild 2 zeigt die Abhängigkeit des Erweiterungsfaktors  $k$  für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % vom Wert des Knickpunktparameters  $\beta$ .

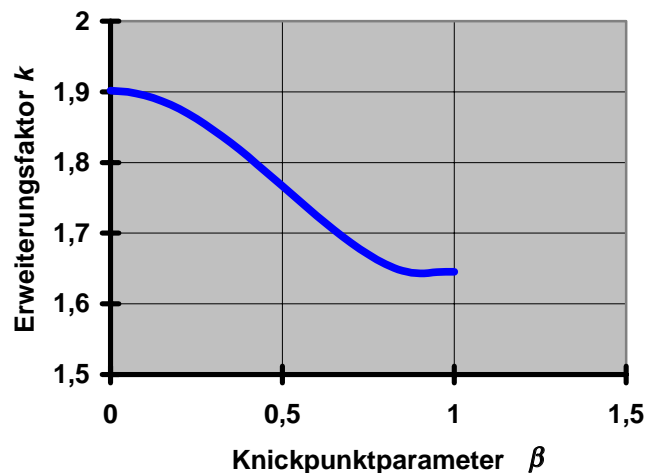


Bild 2: Abhängigkeit des Erweiterungsfaktors  $k$  vom Wert des Knickpunktparameters  $\beta$  einer Trapezverteilung<sup>5</sup> für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 0,95.

Der zu einer Trapezverteilung mit einem Knickpunktparameter  $\beta = 0,33$  gehörende Erweiterungsfaktor für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % wird wie folgt berechnet

$$k = \frac{1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)}}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}} \quad (\text{S10.10})$$

## S11 Kalibrierung eines Temperatur-Blockkalibrators bei einer Temperatur von 180 °C<sup>6</sup>

**S.11.1** Als Teil der Kalibrierung wird die Temperatur, die einer Messbohrung eines Temperatur-Blockkalibrators zugeordnet werden muss, gemessen. Dies geschieht, nachdem sich die Anzeige der eingebauten Temperaturanzeige auf 180,0 °C stabilisiert hat. Die Temperatur der Kalibrierbohrung wird durch ein eingesetztes Platin-Widerstands-Thermometer, das als Gebrauchsnormale dient, bestimmt, indem der elektrische Widerstand des Thermometers mit einer Wechselstrom-Widerstandsbrücke gemessen wird. Die Temperatur  $t_x$ , die als Temperatur der Messbohrung zugeordnet werden muss, wenn die Ablesung der eingebauten Temperaturanzeige 180,0 °C beträgt, ist gegeben durch:

<sup>5</sup> Anm. des Übersetzers:  $\beta=0$  entspricht einer Dreieckverteilung und  $\beta=1$  einer Rechteckverteilung.

<sup>6</sup> Ein ähnliches Beispiel findet sich in der Richtlinie DKD-R 5-4, Kalibrierung von Temperatur-Blockkalibratoren und in der EA-Richtlinie EA-10/13, Guidelines on the Calibration of Temperature Block Calibrators. Es ist hier in vereinfachter Form angegeben, um hervorzuheben, wie in einem Kalibrierverfahren ein Wert einer Anzeige eines Geräts zugeordnet wird. Dieses Verfahren ist für Kalibrierungen in verschiedenen Gebieten der Messtechnik grundlegend und daher von allgemeinem Interesse. Das Beispiel zeigt außerdem, dass dieses Problem auf zweierlei Weise angegangen werden kann: die direkte Zuordnung eines Werts zur Anzeige des Geräts und die Anbringung einer Korrektur an der Anzeige, gewöhnlich als Messabweichung der Anzeige bezeichnet.



$$t_X = t_S + \delta t_S + \delta t_D - \delta t_{iX} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (\text{S11.1})$$

mit

- $t_S$  - Temperatur des Gebrauchsnormals, abgeleitet aus der Wechselstrom-Widerstandsmessung
- $\delta t_S$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Wechselstrom-Widerstandsmessung
- $\delta t_D$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Drift des Gebrauchsnormals seit seiner letzten Kalibrierung
- $\delta t_{iX}$  - Temperaturkorrektur auf Grund der endlichen Auflösung der Anzeige des Temperatur-Blockkalibrators
- $\delta t_R$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Temperaturunterschiede zwischen den einzelnen Messbohrungen<sup>7</sup>
- $\delta t_A$  - Temperaturkorrektur auf Grund der axialen Temperaturinhomogenität in einer Messbohrung
- $\delta t_H$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Hysterese im ansteigenden und fallenden Zweig des Messzyklus
- $\delta t_V$  - Temperaturkorrektur auf Grund von Variationen der Temperatur innerhalb der Messzeit

Temperaturkorrekturen auf Grund der Wärmeleitfähigkeit werden nicht berücksichtigt, da das als Gebrauchsnormal verwendete Platin-Widerstandsthermometer einen Außendurchmesser  $d \leq 6 \text{ mm}$  hat. Frühere Untersuchungen haben gezeigt, dass Wärmeleitungseffekte in diesem Fall vernachlässigt werden können.

- S11.2 Gebrauchsnormal ( $t_S$ ):** Der Kalibrierschein für das als Gebrauchsnormal verwendete Widerstandsthermometer gibt die Beziehung zwischen Widerstand und Temperatur an. Der gemessene Widerstandswert entspricht einer Temperatur von  $180,10 \text{ °C}$  mit einer beigeordneten erweiterten Messunsicherheit  $U = 30 \text{ mK}$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ).
- S11.3 Bestimmung der Temperatur durch Widerstandsmessung ( $\delta t_S$ ):** Die Temperatur des als Gebrauchsnormal verwendeten Widerstandsthermometers wird mit  $180,10 \text{ °C}$  bestimmt. Die auf Temperatur umgerechnete Standardmessunsicherheit der Widerstandsmessung entspricht  $u(\delta t_S) = 10 \text{ mK}$ .
- S11.4 Temperaturdrift des Gebrauchsnormals ( $\delta t_D$ ):** Aufgrund allgemeiner Erfahrungen mit Platin-Widerstandsthermometern des als Gebrauchsnormal für die Messung verwendeten Typs wird die Temperaturänderung infolge der Widerstandsalterung seit der letzten Kalibrierung des Normals auf innerhalb von  $\pm 40 \text{ mK}$  geschätzt.
- S11.5 Einstellbarkeit des Temperatur-Blockkalibrators ( $\delta t_{iX}$ ):** Das eingebaute Thermometer des Temperatur-Blockkalibrators (Kalibratorthermometer) hat eine Skalenteilung von  $0,1 \text{ K}$ . Das ergibt Temperaturgrenzen von  $\pm 50 \text{ mK}$ , innerhalb derer der thermodynamische Zustand des Temperaturblocks eindeutig eingestellt werden kann.

<sup>7</sup> Anm. des Übersetzers: Abweichend vom engl. Originaltext wird hier die Temperaturabweichung zwischen den Messbohrungen betrachtet. Temperatur-Blockkalibratoren, wie sie im Originaltext vorgesehen sind, sind nach Auskunft der Experten im deutschen Sprachbereich unüblich.

Anmerkung: Wenn die eingebaute Anzeige keine Temperaturwerte angibt, sind die Grenzen auf Grund der Auflösung der Anzeige in Temperaturwerte umzurechnen. Dazu ist der aus der Anzeige abgeleitete Wert mit der Gerätekonstante zu multiplizieren.

**S11.6 Radiale Temperaturinhomogenität ( $\delta t_R$ ):** Die radiale Temperaturdifferenz zwischen verschiedenen Messbohrungen wird auf  $\pm 100$  mK geschätzt.

**S11.7 Axiale Temperaturinhomogenität ( $\delta t_A$ ):** Die Temperaturabweichungen auf Grund axialer Temperaturinhomogenität in der Messbohrung werden aus den Ablesungen für verschiedene Eintauchtiefen auf innerhalb von  $\pm 250$  mK geschätzt.

**S11.8 Hystereseeffekte ( $\delta t_H$ ):** Aus Ablesungen des Referenzthermometers während der Messzyklen mit ansteigender und fallender Temperatur wird die Temperaturabweichung für die Messbohrung aufgrund eines Hystereseeffekts auf innerhalb von  $\pm 50$  mK geschätzt.

**S11.9 Temperaturinstabilität ( $\delta t_V$ ):** Temperaturänderungen auf Grund von Temperaturinstabilität während des 30-minütigen Messzyklus werden auf innerhalb von  $\pm 30$  mK geschätzt.

**S11.10 Korrelationen:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S11.11 Wiederholte Beobachtungen:** Wegen der endlichen Auflösung der Anzeige des eingebauten Thermometers ist eine Streuung der angezeigten Werte nicht beobachtet und nicht berücksichtigt worden.

**S11.12 Messunsicherheitsbudget ( $t_X$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$t_S$	180,10 °C	15 mK	Normal	1,0	15 mK
$\delta t_S$	0,0 °C	10 mK	Normal	1,0	10 mK
$\delta t_D$	0,0 °C	23 mK	Rechteck	1,0	23 mK
$\delta t_{iX}$	0,0 °C	29 mK	Rechteck	-1,0	-29 mK
$\delta t_R$	0,0 °C	58 mK	Rechteck	1,0	58 mK
$\delta t_A$	0,0 °C	144 mK	Rechteck	1,0	144 mK
$\delta t_H$	0,0 °C	29 mK	Rechteck	1,0	29 mK
$\delta t_V$	0,0 °C	17 mK	Rechteck	1,0	17 mK
$t_X$	180,10 °C	164 mK			

**S11.13 Erweiterte Messunsicherheit:** Die dem Ergebnis beigeordnete Standardmessunsicherheit wird durch den Effekt der unbekannten Temperaturkorrektur bezüglich der axialen Temperaturinhomogenität in der Messbohrung und der radialen Temperaturdifferenz zwischen den Messbohrungen dominiert. Die resultierende Verteilung ist keine Normalverteilung, sondern im Wesentlichen trapezförmig. Gemäß S10.13 ist der dem Knickpunktparameter  $\beta = 0,43$  entsprechende Erweiterungsfaktor  $k = 1,81$ .

$$U = k \cdot u(t_x) = 1,81 \cdot 164 \text{ mK} \cong 0,3 \text{ K}$$

**S11.14 Vollständiges Messergebnis:** Die Temperatur der Messbohrung, die einer Anzeige des eingebauten Kalibratorthermometers von  $180,0 \text{ °C}$  zuzuordnen ist, beträgt  $180,1 \text{ °C} \pm 0,3 \text{ K}$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,81$  ergibt. Sie entspricht bei der angenommenen Trapezverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S11.15 Mathematischer Hinweis zum Modell:** Für viele Messtechniker ist es ungewöhnlich, dass die Anzeige des Kalibratorthermometers nicht explizit im Modell der Auswertung nach Gl. (S11.1) erscheint. Man kann ihrer Auffassung der Messaufgabe entgegenkommen, indem man das Problem alternativ durch die Messabweichung

$$E_x = t_x - t_i \quad (\text{S11.2})$$

der eingebauten Temperaturanzeige

$$E_x = t_s - t_i + \delta t_s + \delta t_D - \delta t_{ix} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (\text{S11.3})$$

beschreibt. Der Anzeigewert  $t_i$  ist dabei ein Nennwert. Sein Effekt besteht darin, die Skala der Messgröße zu verschieben. Er trägt jedoch nicht zu der Messunsicherheit bei, die der Messabweichung der Anzeige

$$u(E_x) = u(t_x) \quad (\text{S11.4})$$

beigeordnet ist<sup>8</sup>. Das Modell der Auswertung nach Gl. (S11.1) kann aus Gl. (S11.3) mit Hilfe der Definition der Messabweichung der Anzeige in Gl. (S11.2) zurück-erhalten werden.

Dieser Hinweis zeigt, dass es i. Allg. nicht nur einen Weg gibt, das Modell der Auswertung einer Messung zu wählen. Es steht vielmehr häufig dem Messtechniker frei, dasjenige Modell zu wählen, das seinen Gewohnheiten und Denkweisen am besten entspricht. Modelle der Auswertung, die mathematisch ineinander umgewandelt werden können, stellen denselben Messprozess dar. In Fällen mit einer kontinuierlichen Werteskala, wie bei der betrachteten Kalibrierung eines Temperaturblocks, können alle Modelle der Auswertung, die durch lineare Maßstabtransformationen ineinander überführt werden können, als gleichwertige Beschreibungen des vorgelegten Messproblems angesehen werden.

<sup>8</sup> Anm. des Übersetzers: Nennwert wird hier verstanden, wie in der Fußnote 1 auf Seite 6 angegeben, als fester, approximativer Wert, dem keine Unsicherheit zukommt.

## S12 Kalibrierung eines Haushalts-Wasserzählers

- S12.1** Die Kalibrierung eines Wasserzählers umfasst die Bestimmung der relativen Messabweichung der Anzeige innerhalb des zulässigen Volumendurchflussmessbereichs des Zählers. Die Messung erfolgt auf einem Prüfstand<sup>9</sup>, der den erforderlichen Wasserdurchfluss mit einem Druck von ca. 500 kPa, einem für städtische Leitungswassersysteme typischen Wert, liefert. Das Wasser wird in einem offenen Messbehälter gesammelt, der kalibriert ist und das Wasserreferenzvolumen liefert. Zu Beginn der Messung ist er leer, aber benetzt. Der Messbehälter hat einen enghalsigen Einfüllstutzen, an dem eine Skala angebracht ist, mit der der Füllstand ermittelt werden kann. Der zu kalibrierende Zähler liegt zwischen beiden Behältern und ist an diese angeschlossen. Er hat einen mechanischen Zähler mit Zeigern. Die Messung erfolgt bei einem Durchfluss von 2500 l/h im stationären Start-Stop-Betrieb, was bedeutet, dass der Durchfluss sowohl zu Beginn als auch am Ende der Messung gleich Null ist. Der Anzeigewert des Wasserzählers wird bei Beginn und bei Ende der Messung aufgezeichnet. Der Füllstand im Messbehälter wird bei Ende der Messung aufgezeichnet. Die Wassertemperatur und der Wasserdruck am Zähler und die Temperatur des Wassers im Messbehälter werden auch aufgezeichnet.
- S12.2** Die relative Messabweichung  $e_x$  der Anzeige in einem einzelnen Durchgang ist definiert als

$$e_x = \frac{\Delta V_{iX} + \delta V_{iX2} - \delta V_{iX1}}{V_X} - 1 \quad (\text{S12.1})$$

mit

$$V_X = (V_{is} + \delta V_{is})(1 + \alpha_s(t_s - t_0))(1 + \alpha_w(t_x - t_s))(1 - \kappa_w(p_x - p_s)) \quad (\text{S12.2})$$

wobei

- $\Delta V_{iX} = V_{iX2} - V_{iX1}$  - Differenz der Zähleranzeigen
- $V_{iX1}, V_{iX2}$  - Zähleranzeigen bei Beginn und bei Ende der Messung
- $\delta V_{iX1}, \delta V_{iX2}$  - Korrekturen auf Grund der endlichen Auflösung der Zähleranzeige
- $V_X$  - durch den Zähler während der Messung unter den vorherrschenden Bedingungen geflossenes Volumen, d.h. bei dem Druck  $p_x$  und der Temperatur  $t_x$  am Zählereingang
- $V_{is}$  - am enghalsigen Einfüllstutzen des Messbehälters bei Ende der Messung angezeigtes Volumen
- $\delta V_{is}$  - Korrektur des von der Füllstandsanzeige des Messbehälters angezeigten Volumens auf Grund der endlichen Auflösung der Skala

<sup>9</sup> Anm. des Übersetzers: Der Prüfstand besteht aus einem Vorratstank mit einem Pumpensystem und einem offenen Messbehälter.

$\alpha_s$	- thermischer Volumenausdehnungskoeffizient des Materials des Messbehälters
$t_s$	- Temperatur des Messbehälters
$t_0$	- Referenztemperatur, bei der der Messbehälter kalibriert wurde
$\alpha_w$	- thermischer Volumenausdehnungskoeffizient von Wasser
$t_x$	- Wassertemperatur am Zählereingang
$\kappa_w$	- Kompressibilität von Wasser
$p_s$	- Druck im Messbehälter (beträgt Null, wenn Überdruck betrachtet wird)
$p_x$	- Wasserdruck am Zählereingang

**S12.3 Messbehälter ( $V_{is}, t_0$ ):** Der Kalibrierschein gibt an, dass die Füllstandsanzeige das Volumen von 200 l bei der Referenztemperatur  $t_0 = 20\text{ °C}$  mit einer beigeordneten relativen erweiterten Messunsicherheit von 0,1 % ( $k = 2$ ) anzeigt. Die dem Messwert beigeordnete erweiterte Messunsicherheit ist 0,2 l ( $k = 2$ ).

**S12.4 Auflösung der Füllstandsanzeige des Messbehälters ( $\delta V_{is}$ ):** Der Wasserfüllstand des Messbehälters kann auf  $\pm 1\text{ mm}$  bestimmt werden. Mit dem Skalierungsfaktor 0,02 l/mm des Behälters wird daher die maximale Abweichung des Wasservolumens vom beobachteten angezeigten Wert auf  $\pm 0,02\text{ l}$  geschätzt.

**S12.5 Temperatur des Wassers und des Messbehälters ( $\alpha_s, t_s$ ):** Die Temperatur des Wassers im Messbehälter wird auf  $15\text{ °C}$  innerhalb von  $\pm 2\text{ K}$  bestimmt. Diese Grenzen decken alle möglichen Unsicherheitsquellen, wie z. B. Beiträge aus der Kalibrierung der Temperaturfühler, der Auflösung der Anzeige und vom Temperaturgradienten im Behälter, ab. Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient des Behältermaterials (Stahl) wird einem Handbuch über Materialdaten entnommen und als Konstante angesehen, die gleich  $\alpha_s = 51 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$  im betrachteten Temperaturintervall ist. Da zu diesem Wert keine Messunsicherheit angegeben ist, wird er als bis auf seine letzte signifikante Stelle bekannt angenommen. Für die unbekannten Abweichungen wird daher angenommen, dass sie innerhalb der Rundungsgrenzen von  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$  liegen.

**S12.6 Wassertemperatur am Zähler ( $\alpha_w, t_x$ ):** Die Wassertemperatur am Zählereingang wird auf  $16\text{ °C}$  innerhalb von  $\pm 2\text{ K}$  bestimmt. Diese Grenzen decken alle möglichen Unsicherheitsquellen wie z. B. Beiträge aus der Kalibrierung der Temperaturfühler, der Auflösung der Ablesung und aus kleinen Temperaturänderungen während eines Messdurchgangs ab. Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient von Wasser wird einem Handbuch über Materialdaten entnommen und als Konstante angesehen, die gleich  $\alpha_w = 0,15 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$  im betrachteten Temperaturintervall ist. Da zu diesem Wert keine Messunsicherheit angegeben ist, wird angenommen, dass er bis auf seine kleinste signifikante Stelle bekannt ist. Für die unbekannten Abweichungen wird daher angenommen, dass sie innerhalb der Rundungsgrenzen von  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$  liegen.

**S12.7 Druckdifferenz des Wassers im Zähler und im Behälter ( $\kappa_w, p_s, p_x$ ):** Der Überdruck des Wassers am Zählereingang beträgt 500 kPa mit relativen Abweichungen, die nicht größer als  $\pm 10\%$  sind. Auf seinem Weg vom Zählereingang zum Messbehälter expandiert das Wasser auf einen Überdruck von 0 kPa (Atmosphärendruckbedingung). Die Kompressibilität von Wasser wird einem Handbuch über Materialdaten entnommen und als Konstante angesehen, die gleich  $\kappa_w = 0,46 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$  für das betrachtete Temperaturintervall ist. Da zu diesem Wert keine Messunsicherheit angegeben ist, wird er als bis auf seine letzte signifikante Stelle bekannt angenommen. Für die unbekannten Abweichungen wird somit angenommen, dass sie innerhalb der Rundungsgrenzen von  $\pm 0,005 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$  liegen.

**S12.8 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S12.9 Messunsicherheitsbudget ( $V_x$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standardmess- unsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$V_{is}$	200,02 l	0,10 l	Normal	1,0	0,10 l
$\delta V_{is}$	0,0 l	0,0115 l	Rechteck	1,0	0,0115 l
$\alpha_s$	$51 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$0,29 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Rechteck	$-1000 \text{ l} \cdot \text{K}$	$-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ l}$
$t_s$	15°C	1,15 K	Rechteck	$-0,0198 \text{ l} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,0228 \text{ l}$
$\alpha_w$	$0,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Rechteck	$200 \text{ l} \cdot \text{K}$	$0,58 \cdot 10^{-3} \text{ l}$
$t_x$	16°C	1,15 K	Rechteck	$-0,0300 \text{ l} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,0346 \text{ l}$
$\kappa_w$	$0,46 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$	Rechteck	$-100 \text{ l} \cdot \text{kPa}$	$-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ l}$
$p_x$	500 kPa	29 kPa	Rechteck	$-9,2 \cdot 10^{-6} \text{ l} \cdot \text{kPa}^{-1}$	$-0,0027 \text{ l}$
$p_s$	0,0 Pa	-	-	-	-
$V_x$	199,95 l	0,109 l			

Die dem Ergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit wird deutlich durch den Beitrag der Füllstandsanzeige des Messbehälters dominiert. Endgültig ergibt sich daraus keine Normal- sondern im Wesentlichen eine Rechteckverteilung. Das muss beim weiteren Vorgehen der Ermittlung der Messunsicherheit berücksichtigt werden.

**S12.10 Zähleranzeige ( $\Delta V_{ix}, \delta V_{ix1}, \delta V_{ix2}$ ):** Der zu kalibrierende Wasserzähler hat eine Auflösung von 0,2 l. Daraus ergeben sich die Grenzen von  $\pm 0,1 \text{ l}$  für die maximalen Abweichungen aufgrund der endlichen Auflösung bei beiden Ablesungen.

### S12.11 Messunsicherheitsbudget ( $e_X$ )

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$\Delta V_{iX}$	200,0 l	-	Nominal	-	-
$\delta V_{iX1}$	0,0 l	0,058 l	Rechteck	$-5,0 \cdot 10^{-3}$	$-0,29 \cdot 10^{-3}$ l
$\delta V_{iX2}$	0,0 l	0,058 l	Rechteck	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-3}$ l
$V_X$	199,95 l	0,109 l	Normal	$-5,0 \cdot 10^{-3}$	$-0,55 \cdot 10^{-3}$ l
$e_X$	0,000 3	$0,68 \cdot 10^{-3}$			

**S12.12 Reproduzierbarkeit des Zählers:** Die relative Messabweichung der Anzeige des zu kalibrierenden Wasserzählers bei dem eingestellten Durchfluss von 2500 l/h weist eine beträchtliche Streuung auf. Aus diesem Grund wird die relative Messabweichung der Anzeige dreimal bestimmt. Die Ergebnisse der Durchgänge werden in einem Modell für die mittlere Messabweichung der Anzeige  $e_{X_{av}}$  als unabhängige Beobachtungen  $e_{X_j}$  behandelt:

$$e_{X_{av}} = e_X + \delta e_X \quad (\text{S12.3})$$

mit

- $e_X$  - relative Messabweichung der Anzeige eines einzelnen Durchgangs,
- $\delta e_X$  - Korrektur der relativen Messabweichung der Anzeige aus den verschiedenen Durchgängen auf Grund der schlechten Wiederholpräzision des Zählers.

### S12.13 Messungen ( $e_X$ ):

Nr.	beobachtete relative Messabweichung der Anzeige
1	0,000 3
2	0,000 5
3	0,002 2

Arithmetischer Mittelwert  $\bar{e}_X = 0,001$

Empirische Standardabweichung  $s(e_{X_j}) = 0,001$

Standardmessunsicherheit  $u(\bar{e}_X) = s(\bar{e}_X) = \frac{0,001}{\sqrt{3}} = 0,000 60$

### S12.14 Messunsicherheitsbudget ( $e_{X_{av}}$ ):

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standardmess- unsicherheit $u(x_i)$	eff. Frei- heitsgrade	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$e_x$	0,001	$0,60 \cdot 10^{-3}$	2	Normal	1,0	$0,60 \cdot 10^{-3}$
$\delta e_x$	0,0	$0,68 \cdot 10^{-3}$	$\infty$	Normal	1,0	$0,68 \cdot 10^{-3}$
$e_{X_{av}}$	0,001	$0,91 \cdot 10^{-3}$	10			

**S12.15 Erweiterte Messunsicherheit:** Weil die effektiven Freiheitsgrade der Standardmessunsicherheit, die der mittleren relativen Messabweichung beigeordnet sind, gering sind, muss der Standard-Erweiterungsfaktor gemäß Tabelle E1 geändert werden:

$$U = k \cdot u(e_{X_{av}}) = 2,28 \cdot 0,91 \cdot 10^{-3} \cong 2 \cdot 10^{-3}$$

**S12.16 Vollständiges Messergebnis:** Die für einen Durchfluss von 2500 l/h bestimmte mittlere relative Messabweichung der Anzeige des Wasserzählers beträgt  $0,001 \pm 0,002$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2,28$  ergibt. Sie entspricht bei einer t-Verteilung mit  $v_{\text{eff}} = 10$  effektiven Freiheitsgraden einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

## S13 Kalibrierung eines Lehrings mit einem Nenndurchmesser von 90 mm

**S13.1** Ein Stahllehring mit  $D_x = 90$  mm Nenninnendurchmesser wird nach einem Verfahren kalibriert, das in EA-10/06 (früher EAL-G29) eingeführt worden ist. Verwendet werden ein Längenkomparator des Abbe-Typs und ein Stahleinstellring, dessen Nenninnendurchmesser  $D_s = 40$  mm beträchtlich von dem des zu kalibrierenden Rings abweicht. In diesem Fall übernehmen der Längenkomparator und der Stahleinstellring die Rolle von Gebrauchsnormen. Die Ringe werden vorsichtig nacheinander auf einem Tisch mit vier Freiheitsgraden, der alle Positionierelemente für die Ausrichtung der Prüflinge umfasst, festgeklemmt. Die Ringe werden an mehreren diametral voneinander entfernten Stellen mit zwei C-förmigen Armen, die auf der festen bzw. Messspindel befestigt sind, angetastet. Die C-förmigen Arme sind mit kugeligen Antastspitzen ausgerüstet. Die Messkraft wird von einem Spanngewicht erzeugt, das eine konstante Kraft von nominal 1,5 N über den gesamten Messbereich gewährleistet. Die Messspindel ist starr mit dem Messkopf eines Stahl-Strichmaßstabs mit einer Auflösung von  $0,1 \mu\text{m}$  verbunden. Die Strichteilung des Komparators wird in regelmäßigen Abständen überprüft, um die vom Hersteller spezifizierten Grenzwerte für Messabweichungen<sup>10</sup> (MPE, maximum permissible error) zu bestätigen.

<sup>10</sup> Anm. des Übersetzers: Die Beträge der Grenzwerte für Messabweichungen werden Fehlergrenzen genannt (Internationales Wörterbuch der Metrologie, Hrsg. DIN, 1994, Abschn. 5.21).



Die Umgebungstemperatur wird überwacht, um die für das Kalibrierverfahren genannten Umgebungsbedingungen aufrechtzuerhalten. Die Temperatur im Arbeitsvolumen des Komparators wird innerhalb von  $\pm 0,5$  K auf  $20$  °C gehalten. Es wird darauf geachtet, dass die Ringe und die Strichskala die überwachte Temperatur während der gesamten Kalibrierung beibehalten.

**S13.2** Den Durchmesser  $d_x$  des bei der Referenztemperatur  $t_0 = 20$  °C zu kalibrierenden Rings erhält man aus der Beziehung:

$$d_x = d_s + \Delta l + \delta l_i + \delta l_T + \delta l_P + \delta l_E + \delta l_A \quad (\text{S13.1})$$

mit

- $d_s$  - Durchmesser des Referenzeinstellrings bei Referenztemperatur
- $\Delta l$  - beobachtete Differenz in der Verschiebung der Messspindel, wenn die Antastspitzen die Innenfläche der Ringe an zwei diametral voneinander entfernten Stellen berühren
- $\delta l_i$  - Korrektur für die Messabweichung der Anzeige des Komparators
- $\delta l_T$  - Korrektur für Temperatureffekte des zu kalibrierenden Rings, des Referenzeinstellrings und der Strichskala des Komparators
- $\delta l_P$  - Korrektur für die koaxiale Fehljustierung der Taster in Bezug auf die Messlinie
- $\delta l_E$  - Korrektur für die Differenz in den elastischen Verformungen des zu kalibrierenden Rings und des Referenzeinstellrings
- $\delta l_A$  - Korrektur für die Differenz der Abbe-Fehler des Komparators, wenn die Durchmesser des zu kalibrierenden Rings und des Referenzeinstellrings gemessen werden

**S13.3 Gebrauchsnorm ( $d_s$ ):** Der Innendurchmesser des als Gebrauchsnorm verwendeten Einstellrings wird im Kalibrierschein zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit mit  $40,0007 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ } \mu\text{m}$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) angegeben.

**S13.4 Komparator ( $\delta l_i$ ):** Die Korrekturen für die Messabweichung der Strichskala wurden vom Hersteller bestimmt und elektronisch eingespeichert. Verbleibende Restbeiträge liegen in den vom Hersteller angegebenen Grenzen von  $\pm (0,3 \text{ } \mu\text{m} + 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot l_i)$ , wobei  $l_i$  die angezeigte Länge ist. Die Einhaltung der Spezifikationen wird durch periodische Überprüfungen gesichert. Für die tatsächliche Längendifferenz  $D_x - D_s = 50 \text{ mm}$  werden unbekannte Restbeiträge auf innerhalb von  $\pm 0,375 \text{ } \mu\text{m}$  geschätzt.

**S13.5 Temperaturkorrekturen ( $\delta l_T$ ):** Während der gesamten Messung wird sorgfältig darauf geachtet, dass der zu kalibrierende Ring, der Einstellring und die Komparatorskala die überwachte Temperatur beibehalten. Auf Grund früherer Messungen und allgemeiner Erfahrungen mit dem Messsystem ist man sich sicher, dass die Abweichungen der Temperaturen des zu kalibrierenden Rings, des Einstellrings und der Komparatorskala von der Umgebungstemperatur innerhalb von  $\pm 0,2$  K bleiben. Die

Umgebungstemperatur im Messraum wird jedoch auf innerhalb  $\pm 0,5$  K geschätzt. Die Kenntnis der Messung wird daher am besten durch die Abweichung der Umgebungstemperatur von der Referenztemperatur und die Abweichungen der Temperaturen des zu kalibrierenden Rings, des Einstellrings und der Komparatorskala (Lineal) von der Umgebungstemperatur beschrieben. Die Korrektur  $\delta l_e$  für Temperatureinflüsse wird aus dem Teilmodell der Auswertung

$$\begin{aligned} \delta l_T = & (D_S \cdot (\alpha_S - \alpha_R) - D_X \cdot (\alpha_X - \alpha_R)) \cdot \Delta t_A \\ & + D_S \cdot \alpha_S \cdot \delta t_S - D_X \cdot \alpha_X \cdot \delta t_X - (D_S - D_X) \cdot \alpha_R \cdot \delta t_R \end{aligned} \quad (\text{S13.2})$$

bestimmt, wobei

- $D_X, D_S$  - Nenndurchmesser des zu kalibrierenden Rings und des Referenzeinstellrings
- $\alpha_X, \alpha_S, \alpha_R$  - Längenausdehnungskoeffizienten des zu kalibrierenden Rings, des Referenzeinstellrings und der Komparator-Strichskala
- $\Delta t_A = t_A - t_0$  - Abweichungen der Umgebungstemperatur des Messraums von der Referenztemperatur  $t_0 = 20$  °C
- $\delta t_X, \delta t_S, \delta t_R$  - Abweichungen der Temperatur des zu kalibrierenden Rings, des Referenzeinstellrings und der Komparator-Strichskala von der Umgebungstemperatur

Da die Erwartungswerte der vier in Gl. (S13.2) eingehenden Temperaturdifferenzen gleich Null sind, erfasst die übliche linearisierte Version keine Effekte der mit den Werten der drei Längenausdehnungskoeffizienten verbundenen Messunsicherheit. Wie in Abschnitt S4.13 dargestellt, muss die nichtlineare Version benutzt werden, um die mit den vier Produkttermen verbundene Standardunsicherheit zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \delta l_{TA} &= (D_S \cdot (\alpha_S - \alpha_R) - D_X \cdot (\alpha_X - \alpha_R)) \cdot \Delta t_A \\ \delta l_{TS} &= D_S \cdot \alpha_S \cdot \delta t_S \\ \delta l_{TX} &= D_X \cdot \alpha_X \cdot \delta t_X \\ \delta l_{TR} &= (D_S - D_X) \cdot \alpha_R \cdot \delta t_R \end{aligned} \quad (\text{S13.3})$$

Auf der Grundlage des Kalibrierscheins für den Einstellring und der Herstellerdaten für den zu kalibrierenden Ring und die Komparatorskala wird angenommen, dass die Längenausdehnungskoeffizienten in dem Intervall  $(11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  liegen. Bei diesem Wert und den am Anfang angegebenen Grenzen der Temperaturänderung sind die den vier Produktgliedern beigeordneten Standardmessunsicherheiten  $u(\delta l_{TA}) = 0,012 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $u(\delta l_{TS}) = 0,053 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $u(\delta l_{TX}) = 0,12 \text{ } \mu\text{m}$  und  $u(\delta l_{TR}) = 0,066 \text{ } \mu\text{m}$ . Aus diesen Werten wird die den kombinierten Temperaturkorrekturen beigeordnete Standardmessunsicherheit mit Hilfe des folgenden Unter-Messunsicherheitsbudgets abgeleitet:

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$\delta l_{TA}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,012 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,012 $\mu\text{m}$
$\delta l_{TS}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,053 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,053 $\mu\text{m}$
$\delta l_{TX}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,12 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,12 $\mu\text{m}$
$\delta l_{TR}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,066 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,066 $\mu\text{m}$
$\delta l_T$	0,0 $\mu\text{m}$	0,15 $\mu\text{m}$			

**S13.6 Koaxialitätskorrektur ( $\delta l_p$ ):** Die Koaxialitätsabweichung der zwei kugelförmigen Aufnehmer und die Messlinie werden als innerhalb von  $\pm 20 \mu\text{m}$  liegend angenommen. Mit den in dem mathematischen Hinweis (S13.13) angegebenen Gleichungen sind die Korrektur für eine mögliche Nichtaxialität und die zugehörige Standardmessunsicherheit gegeben durch:

$$\delta l_p = 2 \cdot \left( \frac{1}{D_x} - \frac{1}{D_s} \right) \cdot u^2(\delta c) \quad (\text{S13.4})$$

$$u^2(\delta l_p) = \frac{16}{5} \cdot \left( \frac{1}{D_x^2} + \frac{1}{D_s^2} \right) \cdot u^4(\delta c) \quad (\text{S13.5})$$

Hier ist  $\delta c$  der kleine Abstand der gemessenen Sehne vom Ringmittelpunkt. Die sich für die Korrektur und die zugehörige Standardmessunsicherheit ergebenden Werte sind  $\delta l_p \cong -0,004 \mu\text{m}$  und  $u(\delta l_p) \cong 0,0065 \mu\text{m}$ . Wie aus dem Messunsicherheitsbudget (S13.10) ersichtlich ist, sind diese Werte zwei Größenordnungen kleiner als die verbleibenden Unsicherheitsbeiträge, so dass ihr Einfluss unter den vorliegenden Messbedingungen nicht berücksichtigt zu werden braucht.

**S13.7 Korrektur für elastische Verformung ( $\delta l_e$ ):** Die elastische Verformung des zu kalibrierenden Rings oder des Referenzeinstellrings wird während der laufenden Messung nicht bestimmt. Auf der Grundlage früherer Erfahrungen werden die sich aus elastischen Verformungen ergebenden Effekte jedoch auf innerhalb  $\pm 0,03 \mu\text{m}$  geschätzt.

**S13.8 Abbe-Fehler-Korrektur ( $\delta l_A$ ):** Die tatsächlichen Werte der Abbe-Fehler des Komparators werden nicht während der laufenden Messung bestimmt. Auf der Grundlage von Erfahrungen und von Daten periodischer Überprüfungen des Komparators werden die Effekte von Abbe-Fehlern jedoch auf innerhalb  $\pm 0,02 \mu\text{m}$  geschätzt.

**S13.9 Messungen ( $\Delta l$ ):** Die folgenden Beobachtungen werden in Bezug auf den unbekannten Ring und den Einstellring gemacht:

Nr	Messobjekt	Beobachtung	Messgröße
1	Referenz-Einstellring	0 bei diesem Schritt wird die Anzeige auf Null gesetzt	Durchmesser in Nennrichtung der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse
2	zu kalibrierender Ring	49,99935 mm	Durchmesser in Nennrichtung der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse
3	zu kalibrierender Ring	49,99911 mm	Durchmesser in der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse, in Bezug auf die Nennrichtung um +1 mm auf dem Umfang um die Achse gedreht
4	zu kalibrierender Ring	49,99972 mm	Durchmesser in der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse, in Bezug auf die Nennrichtung um -1 mm auf dem Umfang um die Achse gedreht
5	zu kalibrierender Ring	49,99954 mm	Durchmesser in Nennrichtung, um 1 mm nach oben verschoben zur Ebene parallel zur Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse
6	zu kalibrierender Ring	49,99996 mm	Durchmesser in Nennrichtung, um 1 mm nach unten verschoben zur Ebene parallel zur Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse

Die Beobachtungen können in zwei Gruppen eingeteilt werden: die Beobachtung des Durchmessers des Einstellrings (Beobachtung Nr. 1), die dazu dient, die Komparatoranzeige auf Null zu setzen, und die Beobachtung des Durchmessers des zu kalibrierenden Rings (Beobachtungen Nr. 2 bis 6), die die Differenz zwischen den Durchmessern angeben:

Arithmetisches Mittel

$$\overline{\Delta l} = 49,999\,54\text{ mm}$$

Standardabweichung einer Einzelbeobachtung

$$s(\Delta l) = 0,33\text{ }\mu\text{m}$$

Standardabweichung des Mittelwerts

$$s(\overline{\Delta l}) = \frac{s(\Delta l)}{\sqrt{5}} = 0,15\text{ }\mu\text{m}$$

Die Standardabweichung einer Einzelbeobachtung  $s(\Delta l) = 0,33\text{ }\mu\text{m}$  berücksichtigt Effekte von Formabweichungen des zu kalibrierenden Rings sowie der Wiederholbarkeit des Komparators. Um die zu der beobachteten mittleren Durchmesserdifférenz gehörige Standardabweichung zu erhalten, muss auch die sich aus der Nullstellung der Komparatoranzeige ergebende Unsicherheit berücksichtigt werden. Diese wird aus der zusammengefassten empirischen Standardabweichung  $s_p(0) = 0,25\text{ }\mu\text{m}$  abgeleitet, die in einer früheren Messung unter denselben Messbedingungen erzielt

worden ist. Die sich daraus ergebende Standardmessunsicherheit für die beobachtete Durchmesserdifférenz ist

$$u(\Delta l) = \sqrt{s^2(\Delta l) + s_p^2(0)} = 0,30 \mu\text{m}$$

### S13.10 Messunsicherheitsbudget ( $d_x$ ):

GröÙe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$d_s$	40,000 7 mm	0,10 $\mu\text{m}$	Normal	1,0	0,10 $\mu\text{m}$
$\Delta l$	49,999 55 mm	0,30 $\mu\text{m}$	Normal	1,0	0,30 $\mu\text{m}$
$\delta l_i$	0,0 mm	0,22 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,22 $\mu\text{m}$
$\delta l_T$	0,0 mm	0,15 $\mu\text{m}$	Normal	1,0	0,15 $\mu\text{m}$
$\delta l_p$	0,000 004 mm	0,0065 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,007 $\mu\text{m}$
$\delta l_E$	0,0 mm	0,018 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,018 $\mu\text{m}$
$\delta l_A$	0,0 mm	0,012 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,012 $\mu\text{m}$
$d_x$	90,000 25 mm	0,414 $\mu\text{m}$			

### S13.11 Erweiterte Messunsicherheit:

$$U = k \cdot u(d_x) = 2 \cdot 0,414 \mu\text{m} \cong 0,9 \mu\text{m}$$

### S13.12 Vollständiges Messergebnis

Der Durchmesser des Lehrings beträgt (90,000 3  $\pm$  0,000 9) mm.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei Normalverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S13.13 Mathematischer Hinweis zur Nichtaxialität:** Da es nicht möglich ist, die Ringe in Bezug auf die Messachse des Komparators genau auszurichten, ist die bei der Messung ermittelte GröÙe eine Sehne des betreffenden Rings in der Nähe seines Durchmessers. Die Länge  $d'$  dieser Sehne, die bei der Messung beobachtet wird, steht mit dem Ringdurchmesser  $d$  wie folgt in Beziehung:

$$d' = d \cdot \cos(\delta\varphi) \cong d \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(\delta\varphi)^2\right) \quad (\text{S13.6})$$

wobei  $\delta\varphi$  der kleine Winkel ist, der den halben Mittelpunktswinkel der Sehne zu  $\pi/2$  ergänzt. Dieser Winkel steht andererseits zu dem kleinen Abstand  $\delta c$  der Sehne vom Mittelpunkt des Rings in Beziehung:

$$\delta c = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin(\delta\varphi) \cong \frac{1}{2} \cdot d \cdot \delta\varphi \quad (\text{S13.7})$$

so dass Gl. (S13.6) wie folgt geschrieben werden kann:

$$d' \cong d - 2 \frac{(\delta c)^2}{D} \quad (\text{S13.8})$$

wobei der Durchmesser  $d$  des Rings in dem Verhältnis durch seinen Nenndurchmesser  $D$  ersetzt worden ist, da der Nenner des Verhältnisses bereits eine kleine Größe ist. Die beste Durchmessereinschätzung erzielt man, indem man den Erwartungswert der letzten Beziehung als

$$d = d' + 2 \frac{u^2(\delta c)}{D} \quad (\text{S13.9})$$

auffasst.

Hier ist zu berücksichtigen, dass der kleine Abstand  $\delta c$  einen Erwartungswert von Null hat. Es muss auch berücksichtigt werden, dass die Bedeutung von  $d$ ,  $d'$  und  $\delta c$  in Gl. (S13.8) und (S13.9) nicht identisch ist; während diese Symbole in Gl. (S13.8) die nicht genau bekannten Größen oder Zufallsvariablen darstellen, stehen sie in Gl. (S13.9) für die Erwartungswerte dieser Größen. Da die Varianz einer Zufallsvariablen gleich dem Erwartungswert des Quadrats seiner Abweichung von dem betreffenden Erwartungswert ist, ist das Quadrat der Standardmessunsicherheit für den Durchmesser des Rings gemäß Gl. (S13.8)

$$u^2(d) = u^2(d') + 4 \cdot (\alpha - 1) \frac{u^4(\delta c)}{D^2} \quad (\text{S13.10})$$

wobei

$$\alpha = \frac{m_4(\delta c)}{m_2^2(\delta c)} \quad (\text{S13.11})$$

das Verhältnis des zentrierten Moments vierter Ordnung zum Quadrat des zentrierten Moments zweiter Ordnung des kleinen Abstands  $\delta c$  ist. Dieses Verhältnis hängt von der Verteilung ab, die für  $\delta c$  angenommen wird. Sie nimmt den Wert  $\alpha = 9/5$  an, wenn  $\delta c$  als rechteck verteilt angenommen wird, so dass in diesem Fall die Standardmessunsicherheit für den Durchmesser ausgedrückt wird durch

$$u^2(d) = u^2(d') + \frac{16}{5} \cdot \frac{u^4(\delta c)}{D^2} \quad (\text{S13.12})$$